



Une mémoire ondulatoire : États propres, Chaos et Probabilités

Stéphane Perrard

► To cite this version:

Stéphane Perrard. Une mémoire ondulatoire : États propres, Chaos et Probabilités. Physique [physics]. Université Paris Diderot, 2014. Français. NNT : 2014PA077176 . tel-01158368

HAL Id: tel-01158368

<https://theses.hal.science/tel-01158368>

Submitted on 31 May 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike| 4.0 International License

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : **Physique**

présentée par

Stéphane PERRARD

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

**Une mémoire ondulatoire :
Etats propres, Chaos et Probabilités**

Soutenance prévue le 1^{er} décembre 2014

Elisabeth GUAZZELLI Rapporteur

Jean-Christophe GÉMINARD Rapporteur

Thomas FRISCH Examineur

Mathias FINK Examineur

Stephan FAUVE Invité

Yves COUDER Directeur de thèse

Emmanuel FORT Co-directeur de thèse

Remerciements

Elisabeth Guazzelli et Jean-Christophe Géminard ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi que Stephan Fauve, Mathias Fink et Thomas Frisch de faire partie du jury. Ils ont pris de leur temps pour évaluer ce travail et au passage, contribuer à l'améliorer par leurs nombreuses remarques. Je les remercie tous vivement.

Au cours de ces trois années, j'ai bénéficié d'un excellent cadre de travail au sein du laboratoire MSC. J'aimerais à ce titre remercier ceux qui font tourner la maison, son directeur Loïc Auvray, ainsi que Carole, Lucie, Nadine et Sarah pour leur aide au quotidien. Je remercie également tout ceux qui m'ont apporté une aide technique précieuse : Alexandre, Arnaud, Boubou, David, Jacques, Laurent et Matthieu. Leur présence est, à bien des aspects, une composante essentielle du laboratoire. On l'oublie trop souvent. Au niveau de l'équipe, je tiens à remercier Laurent Limat pour sa gestion, sa bonne humeur et son entrain qui sont un moteur puissant de cohésion et de bonne entente.

Yves Couder m'a fait confiance dès le début de cette thèse. Sa manière d'encadrer le travail, exceptionnelle à bien des aspects, restera un modèle pour moi. Je retiens en particulier ce don qu'il a d'adapter le message à tout interlocuteur. Quel qu'il soit, il pointe là où une amélioration est possible, tout en tenant compte de la personnalité de chacun. Il oriente subtilement le débat, la direction de recherche, pour que chaque individu tire le meilleur de lui même. C'est une chance et un honneur d'avoir travaillé avec lui.

Emmanuel m'a appris qu'il était possible d'avoir une idée de recherche par jour. Je ne le résumerais cependant pas à un « faiseur d'idée ». Son enthousiasme et sa volonté d'aller de l'avant sont d'une puissance rare. Sa rigueur, son sens physique et son implication des derniers instants dans chaque projet sont tout aussi impressionnants. Je le remercie vivement pour tout ce qu'il a apporté.

Cette thèse s'est presque faite à deux. Matthieu Labousse était chargé de faire le penchant théorique et numérique de la présente étude, plus expérimentale. Sa capacité d'adaptation à tout sujet, sa bonne humeur et son intelligence sociale ont permis de développer très tôt un lien fort entre nous, d'avancer ensemble dans nos projets. "Grandir" en parallèle de Matthieu restera pour moi un souvenir fort, une chance. Je le remercie chaleureusement pour ces trois années passées ensemble.

Je remercie également mes deux grands frères scientifiques Julien Moukhtar et Antonin Eddi qui m'ont guidé depuis mes débuts. J'espère pouvoir faire pour d'autres ce qu'ils ont fait pour moi. Je remercie aussi ceux avec qui j'ai eu l'occasion de collaborer. Je pense en particulier à Olivier Giraud, Marc Miskin, Maxime Hubert, Vincent Bacot, Christian Borghesi, Luc Deike et Chi-Tuong Pham avec qui les interactions ont été aussi nombreuses que fructueuses. La plus jeune génération m'a également impressionné par son enthousiasme, son envie d'aller de l'avant sans s'enfermer dans des boîtes. Bonne continuation donc aux différents stagiaires de passage, Bastien, Hugo, Jeremy, Yannick, Charles, Julien, Paul et Yann.

L'environnement de travail, ce fût celui de la salle 777. Une ambiance à la fois conviviale et riche scientifiquement que nous a laissée les ancien(ne)s, Alexis P., Antonin, Chi-Tuong, Giuseppe, J.B., Ju, Julien M., Julien D., Nicolas, et ceux que je n'ai pas connu. Ma reconnaissance va ensuite à Alexis D., Paul, Giuseppe, Antonin, Julien, J.B., Tadashi, Stéphanie, Nicolas, Philippe, Julien M., Julien D., Henri, Maxime et Tommy avec qui j'ai partagé la vie quotidienne autour de leur café, leur "vrai thé", et mon eau colorée. Les interactions autant humaines que scientifiques de cet environnement 777 ont été aussi chaleureuses que constructives. Je remercie tout ceux là, qui y ont activement contribué. Parmi eux, je remercie particulièrement Maxime pour m'avoir appris à jouer au billard et Luc pour toutes nos discussions variées, au labo ou ailleurs. Un clin d'œil aussi aux petits nouveaux qui arrivent, Nicolas, Marc et Vijaya, qui perpétueront je l'espère un "esprit 777".

Je tiens également à remercier les nombreux visiteurs, qui, par leur regard extérieur et intéressé, leurs questions qui font mouche, ont fait avancer notre compréhension par bonds successifs. Ces interactions fréquentes ont été une source d'inspiration inépuisable, dans des directions aussi intéressantes que variées. Je remercie en particulier Alain, Albert, Anand, Basile, Claudio, Christophe, Dan, Jean, Jean-Claude, Jean-Christophe, Jérôme, John, Michael, Nicolas, Olivier, Stephan, Stéphane, Tristan, Yves et ceux que j'ai pu malencontreusement oublier.

Je remercie enfin l'ensemble des membres du laboratoire qui participe à cette ambiance conviviale, enthousiaste et foisonnante, et en particulier Pauline, Clément, Matthieu, Loudjy, Nicolas, Leonardo, Sébastien, Nathalie, Simon, Sham, Lorraine et Chiho pour les interactions de couloir, ou autour d'un verre dans l'un des nombreux bars du quartier.

Plus personnellement, je tiens à remercier ceux et celles qui m'ont accompagné pendant ces années, soutenus au quotidien, et avec qui j'ai partagé des moments exceptionnels. Je pense en particulier à Alexis, Antonin, Céline, Iris, Jean, Julie, Loïc, Simon. Je remercie également ma famille, parents, grands-parents, frères et sœurs et ami(e)s pour leur compréhension (il en fallait) et leur soutien sans cesse renouvelé.

Table des matières

Remerciements	i
Notations	ix
Introduction	xi
1 De la goutte au marcheur :	
Origine de la mémoire ondulatoire	1
1.1 A l’origine, une expérience de non coalescence	1
1.2 De la goutte au marcheur	4
1.2.1 Instabilité de Faraday	4
1.2.2 Impact unique sous le seuil de l’instabilité de Faraday : premier effet de mémoire	5
1.2.3 Goutte rebondissante : un excitateur local d’onde de Faraday .	10
1.2.4 Mise en marche d’une goutte : un effet de mémoire	12
1.3 La <i>Mémoire de chemin</i>	12
1.3.1 Description du champ d’onde	13
1.3.2 Couplage de la goutte au champ	16
1.3.3 Equation de la dynamique d’un marcheur	18
1.4 Une dynamique singulière à explorer	18
1.4.1 Interprétation des équations : une dynamique duale	18
1.4.2 Absence de déterminisme et quantification spontanée	21
1.5 Explorer la dynamique d’un marcheur : quelle expérience réaliser ? . .	23
2 Dispositif expérimental :	
Comment confiner un marcheur dans un puits de potentiel	25
2.1 Vue d’ensemble	25
2.2 Bain vibrant et instabilité de Faraday	28
2.2.1 Obtenir un bain liquide vibré verticalement	28
2.2.2 Instabilité de Faraday et paramètre de mémoire	31
2.3 Création, magnétisation, et confinement d’un marcheur	34

2.3.1	Une goutte diphasée huile/ferrofluide	34
2.3.2	Génération d'un champ magnétique de confinement	36
2.3.3	Force magnétique exercée	38
2.3.4	Génération d'un potentiel harmonique	39
2.3.5	Calibration de la force exercée : résumé	41
2.4	Deux méthodes de mesure complémentaires	41
2.4.1	Observation de la goutte et mesure de sa trajectoire	42
2.4.2	Visualisation directe du champ d'onde	45
2.5	Conclusion	46
3	Marcheur amnésique	47
3.1	Marcheur amnésique en force centrale	47
3.1.1	Capture et confinement d'un marcheur amnésique	49
3.1.2	Comportements transitoires d'un marcheur amnésique	53
3.2	Un temps caractéristique de la dynamique	55
3.2.1	Mécanisme de propulsion d'une goutte : état de l'art	55
3.2.2	Modèle de Rayleigh	56
3.2.3	Mesure expérimentale du temps de convergence	59
3.2.4	Une conséquence : la convergence inévitable vers l'orbite circulaire	60
3.3	Conclusion	62
4	Confinement et mémoire de chemin I : Etats propres	65
4.1	Trajectoires d'un marcheur confiné	68
4.1.1	Premières observations	68
4.1.2	Quantification des orbites circulaires	68
4.1.3	De nouvelles trajectoires stables	69
4.2	Règles de sélection des orbites stables	71
4.2.1	Une famille de courbes géométriques : les Cassiniennes	72
4.2.2	Définition d'observables moyennes	74
4.2.3	Une famille de mode propres	75
4.2.4	Conséquences	79
4.3	Emergence de modes propres par auto-organisation	81
4.3.1	Décomposition du champ d'onde en modes propres	81
4.3.2	Phénomène d'auto-organisation entre la goutte et son onde : cas circulaire	85
4.3.3	Mouvement d'une goutte dans un puits de potentiel ondulatoire	88
4.3.4	Emergence d'une quantification des modes $n = m$	91
4.4	Conclusion	93

5 Confinement et mémoire**de chemin II :****Chaos et Probabilités 95**

5.1	Introduction	95
5.2	Recherche de déterminisme dans des trajectoires désordonnées	97
5.2.1	Premiers signes d'instabilité	97
5.2.2	Caractérisation de l'intermittence au niveau $n = 1$	99
5.2.3	Lien avec le chaos dans les systèmes dissipatifs	99
5.2.4	Recherche de déterminisme : application de premier retour . .	102
5.2.5	Intermittence d'un mode unique : la lemniscate	106
5.2.6	Remarques sur le nombre de degré de liberté	108
5.2.7	Intermittence à un niveau supérieur ($n=2$)	109
5.3	Description statistique et superposition d'états	113
5.3.1	Une persistance des états propres dans une dynamique inter- mittente	113
5.3.2	Une superposition dynamique de modes propres	115
5.3.3	Notion d' <i>états propres</i> d'un marcheur confiné	117
5.3.4	Une complexité croissante avec la mémoire	118
5.4	Conclusion	121

6 Confinement et mémoire de chemin III :**Les trajectoires cassiniennes 123**

6.1	Une Caractérisation géométrique des trajectoires des états propres . .	124
6.1.1	Trajectoires en huit : des lemniscates de Bernoulli	124
6.1.2	Courbes de Cassini	125
6.1.3	Ovales de Cassini	126
6.1.4	Etats propres : des k -courbes de Cassini	127
6.1.5	Courbure locale d'une k -courbe de Cassini	128
6.2	Origine des trajectoires cassiniennes	131
6.2.1	Equation de la dynamique dans la base de Frénet	131
6.2.2	Contrainte de vitesse	132
6.3	Bilan de force le long d'une lemniscate	134
6.3.1	Quelques propriétés utiles de la lemniscate de Bernoulli	134
6.3.2	Expression de la force exercée par les ondes le long d'une lem- niscate	135
6.4	Bilan de force le long d'un ovale de Cassini	138
6.4.1	Perturbation d'une trajectoire circulaire	138
6.4.2	Description du champ d'onde	139
6.4.3	Champ généré par une perturbation d'un cercle	140

6.4.4	Application au cas d'un ovale de Cassini	141
6.4.5	Vérification expérimentale	144
6.5	Conclusion	146
7	Modes propres d'un marcheur libre	147
7.1	Préparation d'une condition initiale	147
7.1.1	Dispositif Expérimental	147
7.1.2	Observations	149
7.1.3	Simulations numériques	152
7.2	Origine de la stabilité des auto-orbités	155
7.2.1	Bilan de force orthoradial	155
7.2.2	Bilan de force radial	156
7.3	Conclusion	158
8	Retournement temporel de la dynamique horizontale d'un marcheur	161
8.1	Une involution de la dynamique d'un marcheur : le saut de phase de π	162
8.1.1	Principe	162
8.1.2	Réalisation expérimentale d'un saut de phase provoqué	163
8.1.3	Saut de phase de π : effet sur le mouvement horizontal d'un marcheur	164
8.2	Saut de phase de π et dynamique horizontale	165
8.2.1	Du saut de phase au retournement temporel de la trajectoire .	165
8.2.2	Retournement temporel	166
8.2.3	Retournement temporel d'une trajectoire chaotique	168
8.3	Un processus de relecture et d'effacement dynamique du champ d'onde antérieur	171
8.3.1	Observation directe du champ d'onde	172
8.3.2	Origine du retournement et effacement temporel	172
8.3.3	Perspectives	174
8.3.4	Inhibition d'un régime chaotique	175
8.4	Conclusion	175
	Conclusion	177
	Perspectives	181
	Transitions forcées entre niveaux	182
	Marcheur dans un double puits de potentiel	184
	Systèmes à mémoire : un couplage entre champ et point matériel	186

Emergence spontanée d'un comportement probabiliste par augmentation de la cohérence temporelle	188
Modèle statistique et intégrale de chemin	189
Lien avec la théorie de l'onde pilote de De Broglie	192
A Méthode de calibration de la force	195
A.1 Principe	195
A.1.1 Dynamique d'une goutte non marcheuse dans le champ d'un aimant	195
A.1.2 Méthode de calibration : principe	196
A.2 Réalisation expérimentale du dispositif de calibration	198
A.2.1 Dispositif	198
A.2.2 Résultats	199
A.3 Champ magnétique généré par un aimant cylindrique	202
A.4 Composante verticale de la force magnétique	204
B Limite du marcheur amnésique : une masse additionnelle d'origine ondulatoire	207
B.1 Dérivation du terme d'inertie additionnel	207
B.1.1 Passage du discret au continu	207
B.1.2 Développement de la force due aux ondes	208
B.1.3 Expression dans le repère de Frenet	208
B.2 Validation expérimentale	210

Notations

f_0, T_0	: Fréquence et période d'oscillation du pot vibrant	(1)
T_F	: Période d'oscillation des ondes de Faraday($T = T_F/2$)	(2)
γ_0	: amplitude d'accélération de la surface	(3)
γ_F	: Accélération du seuil de Faraday	(4)
γ_W	: Accélération du seuil de marche	(5)
λ_F	: Longueur d'onde de Faraday	(6)
k_F	: Vecteur d'onde de Faraday	(7)
g	: Accélération de gravité	(8)
σ	: Tension de surface	(9)
v_ϕ	: Vitesse de phase des ondes de Faraday	(10)
M	: Position de la goutte	(11)
\mathbf{r}	: vecteur position par rapport à l'axe du puits	(12)
(r, θ)	: Coordonnées polaires de la goutte	(13)
(ρ, ϕ)	: Coordonnées polaires pour le calcul du champ global	(14)
$(0, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta)$: Base polaire	(15)
$(M, \mathbf{t}, \mathbf{n})$: Base de Frenet	(16)
α	: Angle formé par $(M, \mathbf{x}, \mathbf{n})$	(17)
R_c	: Rayon de courbure instantané de la trajectoire	(18)
κ	: Courbure instantanée de la trajectoire	(19)
s	: Abscisse curviligne	(20)
m	: Masse de la goutte	(21)
m_W	: Masse du marcheur	(22)
k	: Constante de raideur du puit de potentiel	(23)
ω	: Pulsation imposée par le champ magnétique	(24)
V_0	: Vitesse libre de la goutte	(25)
t_c	: Durée du contact lors de l'impact	(26)
β	: Proportion du temps ^{ix} passé en vol libre	(27)
η_c	: Coefficient de friction durant le contact	(28)
η	: Coefficient de friction effectif (moyenne sur une période)	(29)

Introduction

Il a été mis en évidence en 2004 qu’une goutte pouvait rebondir indéfiniment sur un bain de liquide vibré verticalement [17]. Elle peut se mettre spontanément en mouvement, propulsée par les ondes de surface qu’elle a elle-même générée [18]. L’objet résultant appelé *marcheur* est ainsi constitué à la fois d’un objet ponctuel, la goutte, et d’une structure étendue qui l’entoure, l’onde de surface.

Ces marcheurs ont donné lieu à deux thèses successives au sein de l’équipe d’Yves Couder et Emmanuel Fort, celle de Suzie Protière [73], puis celle d’Antonin Eddi [30]. L’association d’une onde à un objet ponctuel a alors permis de mettre en évidence des comportements surprenants à notre échelle, comme la diffraction de particules individuelles [15] ou une quantification d’orbites circulaires [41, 31].

Dans cette dynamique du marcheur un ingrédient est essentiel : la *mémoire de chemin* [32]. Il s’agit du mécanisme de couplage entre le mouvement de la goutte et l’évolution du champ d’onde qui lui est associé, par stockage périodique d’une information sous la forme d’ondes de surface stationnaires. Omniprésent dans le présent manuscrit, le terme de mémoire de chemin d’un marcheur sera défini plus en détail au cours du chapitre 1. Retenons pour l’heure que la goutte est un système à mémoire dont l’évolution ne dépend pas uniquement de l’instant présent mais aussi d’évènements apparus dans le passé. Le système tire sa particularité de la manière dont est stockée l’information : il s’agit ici d’un encodage de la position de chaque impact de la goutte sur la surface sous la forme d’une onde. On parlera de *mémoire ondulatoire*.

Deux expériences précédentes de confinement d’un marcheur en particulier ont laissé entrevoir les possibilités offertes par une telle mémoire. En confinant le marcheur dans une cavité, la réflexion des ondes sur les parois impose des conditions aux bords pour le champ d’onde, qui, en conséquence, influence le mouvement de la goutte elle même comme l’ont montré Dan Harris, Antonin Eddi et Julien Moukhtar [44]. Dans cette expérience le champ d’onde est cependant contraint par la géométrie de la cellule.

En plaçant un marcheur sur un bain en rotation, Antonin Eddi *et al.* ont montré qu’il apparaissait des orbites circulaires quantifiées [41]. Cette fois, ce sont les tra-

jectoires qui ont été précontraintes : sur un bain en rotation, le marcheur est soumis à une force de Coriolis transverse au mouvement. En présence de cette force, seules des orbites circulaires de même sens de rotation que le bain peuvent être observés.

L’objectif de cette thèse est de réaliser un confinement d’un marcheur qui n’impose pas de contrainte forte, ni aux trajectoires possibles, ni au champ d’onde associé. Confiné, en présence d’effets de mémoire, le marcheur interagira via une onde avec son propre passé. Les trajectoires observées seront alors le fruit d’un phénomène d’auto-organisation entre la goutte et les ondes qu’elle a précédemment générées.

Le dispositif de confinement retenu sera présenté au chapitre 2. Il consiste à appliquer une force magnétique sur une goutte encapsulant du ferrofluide, un liquide sensible à un champ magnétique extérieur. Après une étape de calibration nécessaire, un marcheur peut ainsi être plongé dans un puits de potentiel harmonique de raideur réglable. Cette configuration n’impose aucune condition aux limites au champ d’onde. La symétrie centrale autorise par ailleurs des trajectoires plus variées que les seules orbites circulaires.

Nous nous sommes alors intéressés à la dynamique d’un marcheur dans ce puits de potentiel. Plusieurs pistes d’explorations ont été suivies en parallèle. Présentées de manières séquentielles, ces différentes voies d’explorations pourtant intimement liées feront l’objet des chapitre 3, 4, 5 et 6.

Le chapitre 3 est consacré au régime de mémoire minimale, où la goutte est guidée par les ondes émises dans un passé proche. Il est le fruit d’un travail en binôme avec Matthieu Labousse qui a effectué sa thèse simultanément [54]. Nous verrons que le régime de mémoire minimale peut être décrit par un terme de friction effective, dit modèle de Rayleigh, qui peut servir à décrire le mouvement d’un mobile autopropulsé. Cette description nous servira à mettre en évidence que la dynamique d’un marcheur selon la direction longitudinale au mouvement est issu d’un processus dissipatif, qui impose une structure non hamiltonienne à l’ensemble de la dynamique. Une des conséquences est que le module de la vitesse des gouttes est quasi constant, même en présence d’une force extérieure appliquée.

L’étude des cas de plus haute mémoire, où la goutte revisite des zones perturbées par les ondes précédemment émises sera présentée aux chapitres 4, 5 et 6.

Le chapitre 4 traite des trajectoires périodiques observées et de leur champ d’onde associé. Nous montrerons que sous l’effet des ondes générées, il émerge une double quantification de l’extension spatiale des trajectoires d’une part et du moment cinétique d’autre part. Cette quantification introduit une règle de sélection d’origine ondulatoire des trajectoires suivies qui forment une famille discrète de solutions. Dans le cas des orbites circulaires, nous verrons qu’une décomposition en mode permet de mettre en évidence un potentiel d’énergie effectif, d’origine ondulatoire. La décomposition en mode, outil théorique crucial, est issue d’une collaboration avec

Marc Miskin, étudiant en thèse de l'université de Chicago lors de ses 9 mois parisiens parmi nous. Le mécanisme de construction du puits de potentiel effectif d'origine ondulatoire a été développé conjointement avec Matthieu Labousse [67].

Nous aborderons alors le chapitre 5 consacré aux cas désordonnés où les trajectoires observées ne sont plus périodiques. Nous montrerons qu'il s'agit d'un régime d'*intermittence* ou de multistabilité entre les différentes trajectoires périodiques précédemment introduites. Nous analyserons alors les mécanismes de transition vers cette dynamique chaotique, ainsi que les probabilités d'occupation de chacun des états. Nous montrerons que la famille discrète de trajectoires définie au chapitre 4 forme en fait une base d'états propres sur laquelle les mouvements plus complexes peuvent être décomposés.

Une caractérisation géométrique de ces trajectoires sera ensuite proposée au chapitre 6. Nous verrons que les formes de trajectoires inhabituelles observées qui suivent des courbes "Cassiniennes" sont la conséquence de la contrainte de vitesse constante étudiée au chapitre 3, et de l'excitation de champ d'ondes globaux qui ont été étudiés au chapitre 4. Cette caractérisation et son origine ont été élaborées en collaboration avec Olivier Giraud, chercheur du LPTMS de l'université d'Orsay.

Les résultats précédents ont permis de démontrer que dans la situation de grande mémoire, une force supplémentaire est exercée sur la goutte. Elle provient d'une interaction, médiée par les ondes, de la goutte avec son propre passé. Jusqu'ici, ce n'est pourtant qu'une force additionnelle qui induit des effets de quantification. Nous nous sommes alors demandé si cette force pouvait, à elle seule, générer une attraction suffisante pour permettre un mouvement orbital de la goutte.

Le chapitre 7 est donc consacré au relâchement de la contrainte de confinement pour explorer le mouvement d'un marcheur soumis uniquement au champ d'onde qu'il a préalablement généré. Nous montrerons qu'il existe un régime d'*auto-orbite* où la goutte suit une trajectoire circulaire en l'absence de force extérieure appliquée.

Le chapitre 8 illustre enfin un autre aspect du stockage d'information sous la forme d'une mémoire ondulatoire. Une onde étant un processus réversible en temps, une information stockée peut elle être relue par la goutte elle même ? Par une astuce expérimentale, nous présenterons comment un marcheur peut revenir sur ses propres pas comme si le temps avait été inversé. en effaçant le champ d'onde émis au passage aller par interférence destructive entre ondes générées à l'aller et au retour.

Chapitre 1

De la goutte au marcheur : Origine de la mémoire ondulatoire

Ce chapitre résume des travaux antérieurs effectués sur les gouttes rebondissantes. Le but recherché est de proposer une vision synthétique de ce qui définit un marcheur. Après une brève introduction sur la non-coalescence, nous verrons comment, sur un bain vibré, une mémoire ondulatoire peut être obtenue et comment le couplage de cette mémoire ondulatoire avec une goutte rebondissante permet de générer un marcheur. Par synthèse des différents modèles précédents sur la dynamique du marcheur basés sur la mémoire de chemin, nous proposerons une équation du mouvement horizontal de la goutte qui servira de base théorique. La dernière partie du chapitre introduira enfin les principales questions soulevées que nous aborderons dans le reste du présent manuscrit.

1.1 A l'origine, une expérience de non coalescence

La genèse de ces expériences a commencé en enseignement, lors d'un projet de physique expérimentale en troisième année de licence à l'université Paris-Diderot. Ces projets ont pour objectif de sensibiliser les étudiants à une démarche réelle de recherche, en leur faisant aborder des questions dont l'enseignant ne connaît pas la réponse. Lors d'un de ces projets, Charles-Henri Gautier, encadré par Emmanuel Fort et Yves Couder, a ainsi remarqué en 2004 qu'en déposant une goutte à la surface d'un bain de liquide en vibration verticale, cette dernière rebondissait indéfiniment à la surface [17].

Cette expérience de goutte rebondissante s'inscrit ainsi dans le cadre de la *non coalescence*, qui consiste à isoler un liquide de tout contact, aussi bien solide que liquide. Bien que surprenante, la lévitation d'une goutte de quelques millimètres de diamètre peut être obtenue dans de nombreuses situations. L'idée commune est

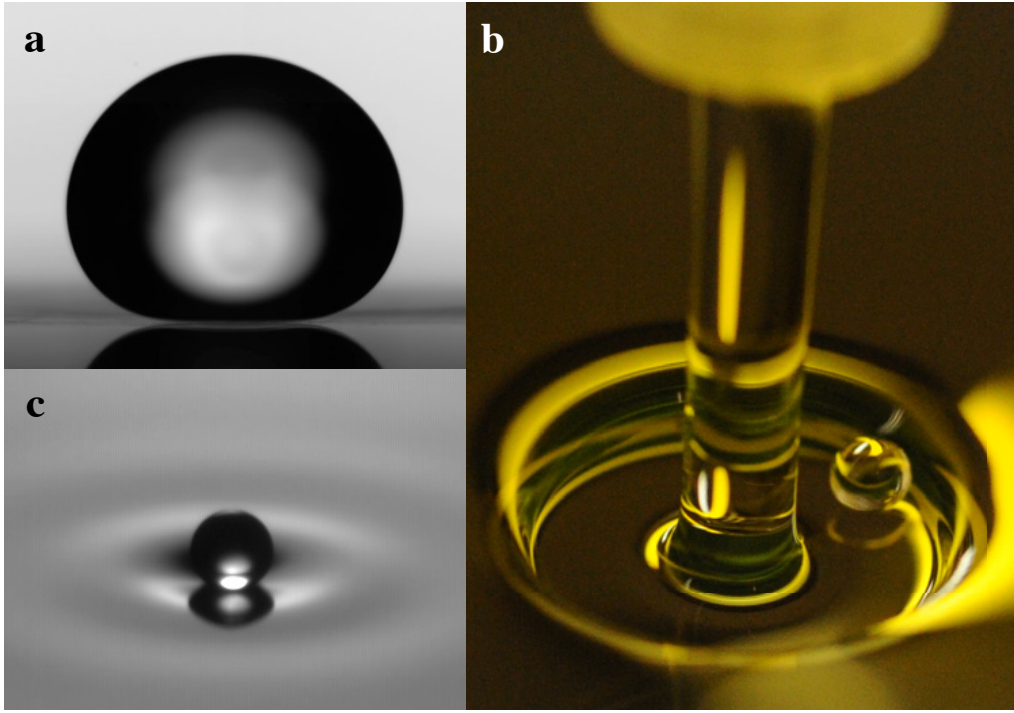


FIGURE 1.1 – **Situations de non coalescence.** Trois exemples de gouttes en lévitation sur un fin film de gaz. Les manières de générer ou de renouveler ce film de gaz peuvent être variées. a) Goutte en lévitation par effet Leidenfrost, *d’après* [11]. Sur une plaque chauffée, une goutte peut léviter sur son propre film de vapeur qu’elle génère par évaporation. b) Goutte piégée dans un ressaut hydraulique *d’après* [28]. L’impact d’un jet sur une plaque génère une vague stationnaire, dans laquelle une goutte peut être emprisonnée. c) Goutte rebondissant sur un bain en vibration *d’après* [30], un fin film d’air supporte le poids de la goutte durant le temps de contact. Dans les trois situations, l’écoulement de gaz sous la goutte permet de supporter son poids par forces de lubrification.

d’isoler le fluide du support à l’aide d’un fin film de gaz. Pour des épaisseurs de film bien inférieures au millimètre, le gaz en écoulement dans le film peut exercer des forces visqueuses suffisantes pour supporter le poids d’une goutte. Forcer le fluide à s’écouler provoque en effet des forces dites de lubrification sur les parois, d’autant plus importantes que l’épaisseur de fluide est faible [42]¹. Dans le cas d’un film de gaz de densité généralement bien plus faible que celle de la goutte liquide on parlera de lévitation ou de situation de non coalescence.

Une simple goutte impactant un bain de liquide doit pouvoir chasser ce film d’air, et donc vaincre les forces de lubrification pour coalescer. Le film d’air peut

1. Lors du contact, la force exercée par le fluide en écoulement visqueux dans un film d’épaisseur h vaut $F_{lubrif} \approx \eta r_f^4 / (h^2 t_c)$ où η est la viscosité dynamique, r_f une longueur typique du film et t_c le temps caractéristique d’évacuation du film. En équilibrant la force de lubrification avec le poids de la goutte $P \approx 4R^3 \rho g$, on trouve $t_c \approx \eta r_f^4 / (4h^2 R^3 \rho g)$.

ainsi porter le poids de la goutte durant environ 50 ms secondes environ [73]. Pour augmenter ce temps de vie naturel d'une goutte portée transitoirement par le film d'air, plusieurs techniques peuvent être envisagées. La coalescence peut par exemple être retardée par ajout de surfactant ce qui ajoute une force répulsive entre monocouches bipolaires [2].

Une autre technique consiste à renouveler le gaz contenu dans le film pour prévenir la coalescence. La figure 1.1 présente trois exemples de goutte en situation de non coalescence, obtenues par renouvellement continu ou périodique du film de gaz. La figure 1.1a présente une photographie tirée d'une étude réalisée par J. Burton *et al.* [11] d'une goutte en lévitation sur une plaque à température bien supérieure à la température d'ébullition du liquide. Découvert au XVIIIème siècle par J.G. Leidenfrost un médecin-théologien, l'effet Leidenfrost consiste à faire léviter une goutte sur le film de vapeur qu'elle génère elle même par évaporation. Pouvant être obtenues avec de l'eau sur une simple poêle de cuisine, les gouttes de Leidenfrost ont depuis fait l'objet d'un grand nombre d'études en laboratoire comme exemple de situation de non mouillage parfait [7, 75]. Citons par exemple l'étude des modes de vibration d'une goutte en l'absence totale de ligne de contact [79], leur mise en mouvement sur un support crenelé [57], ou l'auto-nettoyage de surfaces [4]. Une étude que nous avons effectuée au sein du laboratoire MSC a également permis de montrer qu'un volume de liquide bien supérieur à celui d'une goutte pouvait être mis en lévitation par effet Leidenfrost, en utilisant des supports courbes [66].

Une seconde technique consiste à entretenir le film de gaz en forçant un écoulement d'air sous la goutte. Cet écoulement peut générer des forces de lubrification suffisantes pour maintenir une goutte en lévitation. C'est le cas d'une machine à laver à paroi lisse, qui entraîne un film d'air sous la goutte [56], ou d'une goutte piégée dans le creux de la vague stationnaire générée par un ressaut hydraulique [69, 28], comme le montre la figure tirée d'une étude de Alexis Duschesne *et al.* 1.1b. Dans ce cas, la goutte est maintenue en lévitation par l'entraînement permanent d'un film d'air qui la sépare de la surface liquide. Dans ces expériences de non coalescence, les épaisseurs typiques des films de gaz vont de quelques microns (ressaut hydraulique) à une centaine de microns au maximum pour l'effet Leidenfrost.

L'expérience de gouttes rebondissantes est un moyen alternatif d'obtenir une goutte en lévitation. La vibration verticale du bain sépare périodiquement la goutte de la surface, ce qui renouvelle le film d'air et prévient la coalescence. Une goutte peut ainsi rebondir indéfiniment sur la surface.

La première observation de non coalescence sur un bain vibré a été reportée dans les années 70, pour des gouttes contenant du surfactant [80]. Elle a suscité un regain d'intérêt au cours des années 2000, en raison de la mise en mouvement spontanée des gouttes à la surface du bain [18]. L'équipe de Y. Couder et E. Fort à l'université de

Paris-Diderot, puis celle de S. Dorbolo à l'université de Liège et celle de J. Bush au MIT à Boston se sont ainsi intéressées au temps de vie de ces gouttes sous le seuil de non coalescence [17, 84, 82], aux différents régimes de rebonds possibles [87, 33, 63] et aux propriétés de déformation de la goutte et du bain à l'impact [62, 83, 47].

1.2 De la goutte au marcheur

Ces gouttes rebondissantes présentent la particularité de pouvoir se mettre spontanément en mouvement à la surface du bain, en raison de l'action des ondes de surface qu'elle génère. De telles gouttes seront alors appelées *marcheurs* [18]. Pour comprendre le passage de la goutte statique au marcheur, focalisons nous tout d'abord sur les propriétés de ces ondes de surface qui se propagent sur un bain de liquide vibré.

1.2.1 Instabilité de Faraday

Michael Faraday remarqua dans les années 1830 qu'en faisant vibrer un bain de liquide verticalement des ondes stationnaires apparaissaient à la surface [35]. Pour un liquide soumis à une accélération verticale γ sous la forme $\gamma = \gamma_0 \cos(2\pi f_0 t)$, la gravité est modulée dans le temps.

Dans le cas d'un fluide visqueux K. Kumar et L. Tuckerman ont montré qu'il existe une amplitude d'accélération seuil γ_F de l'accélération γ_0 au delà de laquelle un motif d'ondes stationnaires apparaît à la surface du bain (voir figure 1.2) [52]. Cette modulation dans le temps de la gravité entraîne une instabilité de la position de l'interface par un mécanisme de *forçage paramétrique*. La fréquence des ondes stationnaires ainsi générées est égale à la moitié de la fréquence de forçage, comme illustré en figure 1.2b, par une image tirée de la thèse de Stéphane Douady [27]. On définit donc une période de Faraday $T_F = 2T_0$.

La figure 1.2c, tirée de la thèse d'A. Eddi [30] présente un exemple de motif obtenu dans le cas d'un bain de liquide à géométrie carrée. La longueur d'onde de ces motifs peut se déduire de la relation de dispersion usuelle des ondes à la surface d'un fluide qui lie la pulsation ω au vecteur d'onde k . Cette relation tient compte de la force de rappel hydrostatique (gravité), et des effets de tension de surface qui tendent tous deux à ramener l'interface à sa position d'équilibre. Elle s'écrit :

$$\omega^2 = \tanh(kH) \left(gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right) \quad (1.1)$$

où g est l'accélération de gravité, σ la tension de surface, ρ la densité du fluide, et H la profondeur de liquide [42]. Dans les conditions expérimentales utilisée au cours

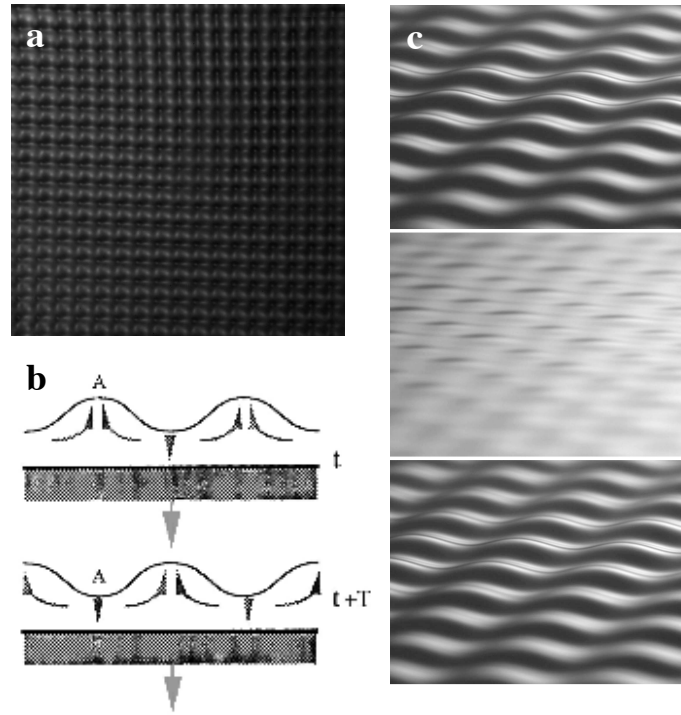


FIGURE 1.2 – **Instabilité de Faraday.** La surface d'un bain de liquide soumis à une vibration verticale peut se déstabiliser, pour former un motif d'ondes stationnaires appelé ondes de Faraday. a) Ondes de Faraday en vue du dessus, dans une cellule de géométrie carrée, *d'après* [30]. b) Mécanisme de mise en mouvement du liquide : les creux et les bosses échangent leurs positions toutes les périodes d'oscillations T_0 du bain *d'après* [26]. La période $T_F = 2T_0$ des ondes de Faraday est ainsi double de celle du bain. c) Trois photographies de l'oscillation au cours du temps d'un motif carré à la surface du liquide, *d'après* [30].

de cette thèse, la fréquence de vibration f_0 du bain sera choisie égale à 80 Hz, ce qui correspond à une fréquence de Faraday de 40 Hz qui sélectionne une longueur d'onde $\lambda_F = 4.75$ mm pour de l'huile silicone de densité $\rho = 0.965\text{g/cm}^3$ et de tension de surface $\sigma = 20$ mN/m.

Au delà du seuil, ces ondes de Faraday apparaissent ainsi spontanément, par amplification de n'importe quelle perturbation initiale. Que se passe-t-il pour une accélération verticale proche, mais en dessous du seuil d'instabilité ?

1.2.2 Impact unique sous le seuil de l'instabilité de Faraday : premier effet de mémoire

La figure 1.3a présente l'amplitude A_0 des ondes stationnaires de Faraday en fonction de l'accélération γ imposée, au voisinage du seuil d'instabilité γ_F . Ce type de diagramme est générique des bifurcations fourches ou supercritiques. Un débat

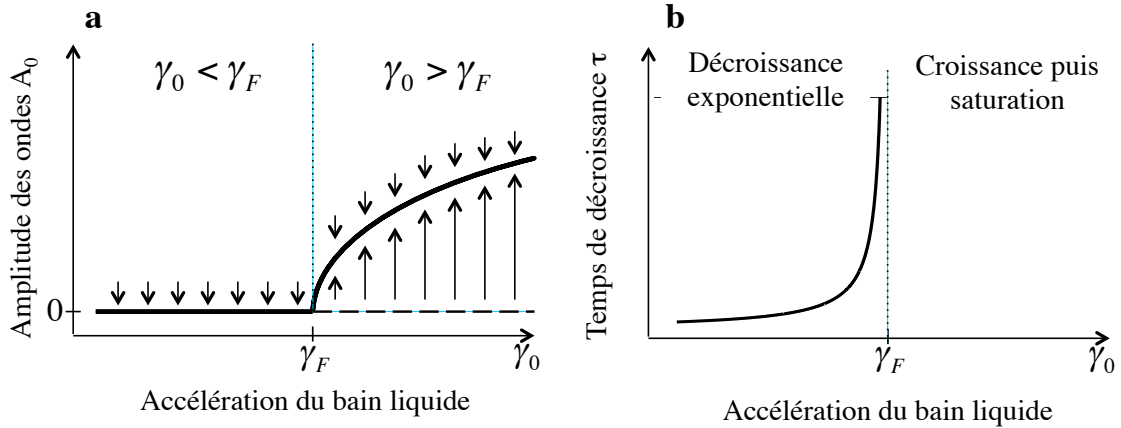


FIGURE 1.3 – **Instabilité de Faraday : devenir d’une perturbation initiale.** a) Amplitude A_0 des ondes de Faraday en fonction de l’accélération verticale γ_0 imposée. La courbe en trait plein représente la solution en régime stationnaire, générique d’une bifurcation fourche. Lorsque la surface du bain est soumise à une perturbation initiale, son devenir va dépendre du signe $\gamma_0 - \gamma_F$. Pour $\gamma_0 > \gamma_F$ une perturbation initiale va croître jusqu’à atteindre la valeur d’équilibre donnée par la courbe noire. Pour $\gamma < \gamma_F$, toute perturbation sera amortie avec un temps caractéristique τ . b) Temps de décroissance τ d’une perturbation initiale en fonction de l’accélération γ_0 au voisinage du seuil par valeur inférieure. Le temps d’amortissement d’une perturbation diverge au seuil de l’instabilité.

ancien sur la nature de l’instabilité de Faraday, qui dépend des conditions aux bords imposées, n’est pas tranché à ce jour. Par souci de simplicité on choisit ici une représentation de type bifurcation supercritique, *i.e* sans courbe d’hystérésis du seuil d’instabilité, ni discontinuité de l’amplitude des ondes au voisinage du seuil²

Le devenir d’une perturbation initiale va dépendre de l’amplitude d’excitation du bain. Pour une accélération $\gamma > \gamma_F$ au dessus du seuil de l’instabilité γ_F , une perturbation initiale de la surface du bain sera amplifiée, avant que l’amplitude sature à une valeur $A_0(\gamma)$ donnée par la courbe en trait plein de la figure 1.3a.

Pour une accélération inférieure au seuil $\gamma < \gamma_F$, une perturbation sera amortie en un temps caractéristique τ . Au seuil d’instabilité, cette perturbation mettra un temps infini à croître ou décroître, elle est "gelée". Juste avant le seuil d’instabilité, le temps d’amortissement τ diverge avec l’écart au seuil, comme illustré sur la figure 1.3b. Ce mécanisme de ralentissement critique est générique d’une bifurcation fourche. Dans le cas de l’instabilité de Faraday, il va permettre de stocker une perturbation initiale sous la forme d’un champ d’onde, durant le temps d’amortissement τ de cette perturbation.

Ce temps de décroissance τ d’une perturbation initiale au voisinage du seuil γ_F

2. Il s’agit d’une très bonne approximation compte tenu de notre dispositif expérimental. Voir chapitre 2 pour des détails supplémentaires.

de l'instabilité de Faraday est donné par l'écart relatif au seuil de Faraday, soit :

$$\tau \propto \frac{\gamma_0}{\gamma_F - \gamma_0} \quad (1.2)$$

Cette théorie a été validée expérimentalement par A. Eddi au cours de sa thèse [30]. A l'aide d'une technique dite de *synthetic schlieren* adaptée à la reconstruction d'interface fluide [61], le profil complet du champ d'onde peut être mesuré au cours du temps. Le principe de la mesure consiste à observer un motif aléatoire à travers le bain de liquide. Dû à la différence d'indice optique entre le liquide et l'air, le motif aléatoire est localement déformé par une inclinaison de l'interface. En mesurant les déformations spatiales du motif, il est possible de remonter au champ de hauteur h de la surface du liquide en tout point, et à tout instant.

Pour isoler la contribution d'un impact unique sur la surface liquide, une bille d'acier a été lâchée au dessus du bain. La figure 1.4 présente quatre photographies tirées de cette expérience [32]. Les figures 1.4a et 1.4c ont été prises 51 ms après impact dans le cas d'un bain au repos (figure 1.4a) ou en vibration verticale, pour une accélération $\gamma_0 \approx 0.98 \gamma_F$, proche du seuil de l'instabilité de Faraday γ_F (figure 1.4c). Les impacts initiaux générés sont donc identiques, mais leur devenir sont différents. Les figures 1.4b et 1.4d ont été prises 173 ms après impact, pour le bain au repos (1.4b) ou en vibration (1.4d).

Dans le cas d'un bain de liquide au repos, l'onde capillaire générée par l'impact se propage simplement. Dans le cas d'un bain en vibration verticale, le passage d'un front gravito-capillaire laisse derrière lui une onde de Faraday circulaire et stationnaire dans le repère du laboratoire.

Le caractère stationnaire des ondes générées par le passage du front est mis en évidence par la figure 1.5 à l'aide de deux diagrammes spatio-temporels de la hauteur $h(x, t)$ du bain après impact d'une bille, pour un bain au repos (figure 1.5a), et proche du seuil de Faraday ($\gamma_0 \approx 0.98 \gamma_F$) (figure 1.5b). Dans le cas d'un bain en vibration, le passage du front capillaire excite bien un motif d'ondes stationnaires, qui correspondent à des oscillations selon des lignes verticales (à x fixé). Cette figure illustre également la différence entre l'amortissement spatial, lié à la diminution d'amplitude du front capillaire au cours de sa propagation et l'amortissement temporel lent et ajustable des ondes stationnaires générées. Le temps caractéristique d'amortissement temporel τ est une mesure de la mémoire des perturbations passées, il est de l'ordre d'une seconde pour la figure 1.5b ($\gamma_0 \approx 0.98 \gamma_F$).

Chaque déformation locale de la surface du bain engendrera ainsi un motif d'ondes stationnaires, centré autour du point d'impact. Le temps d'amortissement τ de ces ondes est donné par l'écart relatif au seuil de l'instabilité de Faraday de l'équation 1.2. Cette *mémoire ondulatoire* peut donc être contrôlée expérimentale-

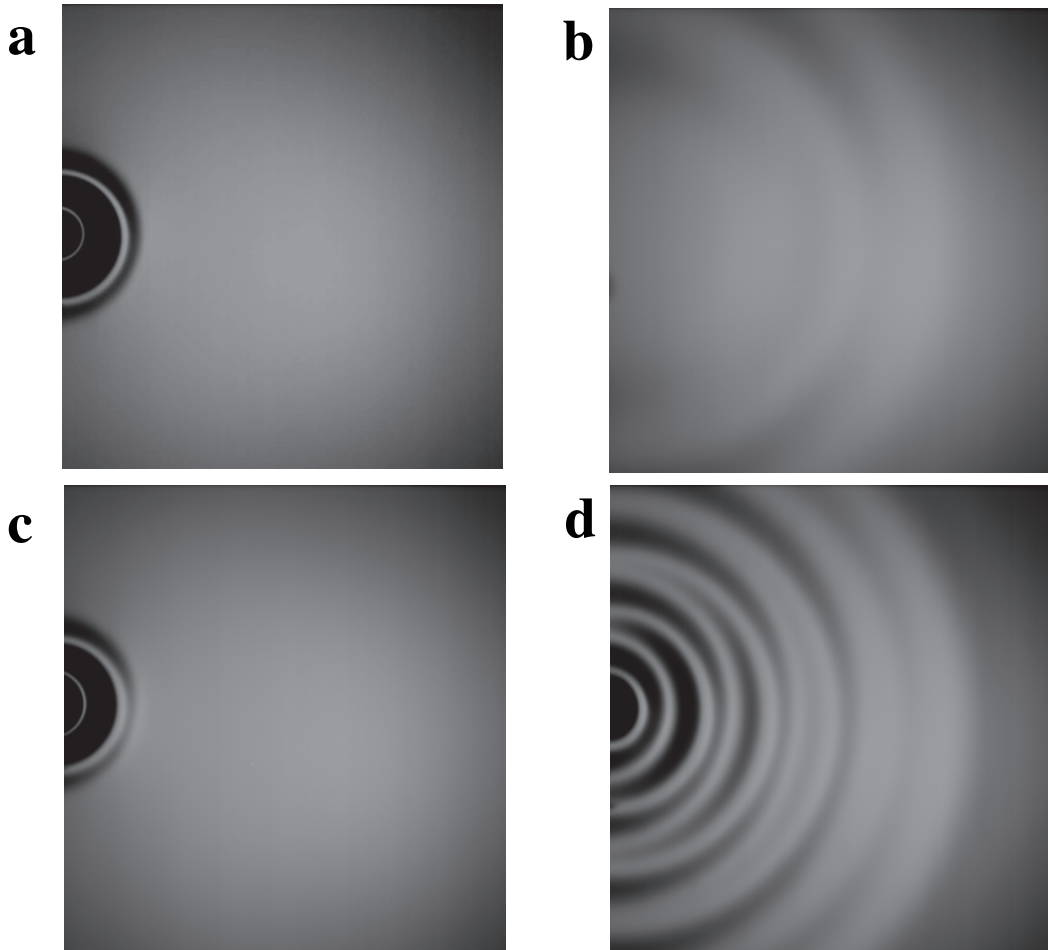


FIGURE 1.4 – **Impact d’une bille d’acier sur un bain de liquide.** a) et b) Ondes générées sur un bain au repos respectivement à $t=51$ ms et $t=173$ ms. L’impact de la bille sur la surface excite une onde gravito-capillaire analogue à celle créée par un caillou jeté dans l’eau. c) et d) Ondes de surface générées sur un bain en vibration verticale avec une accélération γ proche du seuil de l’instabilité de Faraday γ_F . La propagation de l’onde excite sur son passage des ondes de Faraday, centrées sur le point d’impact.

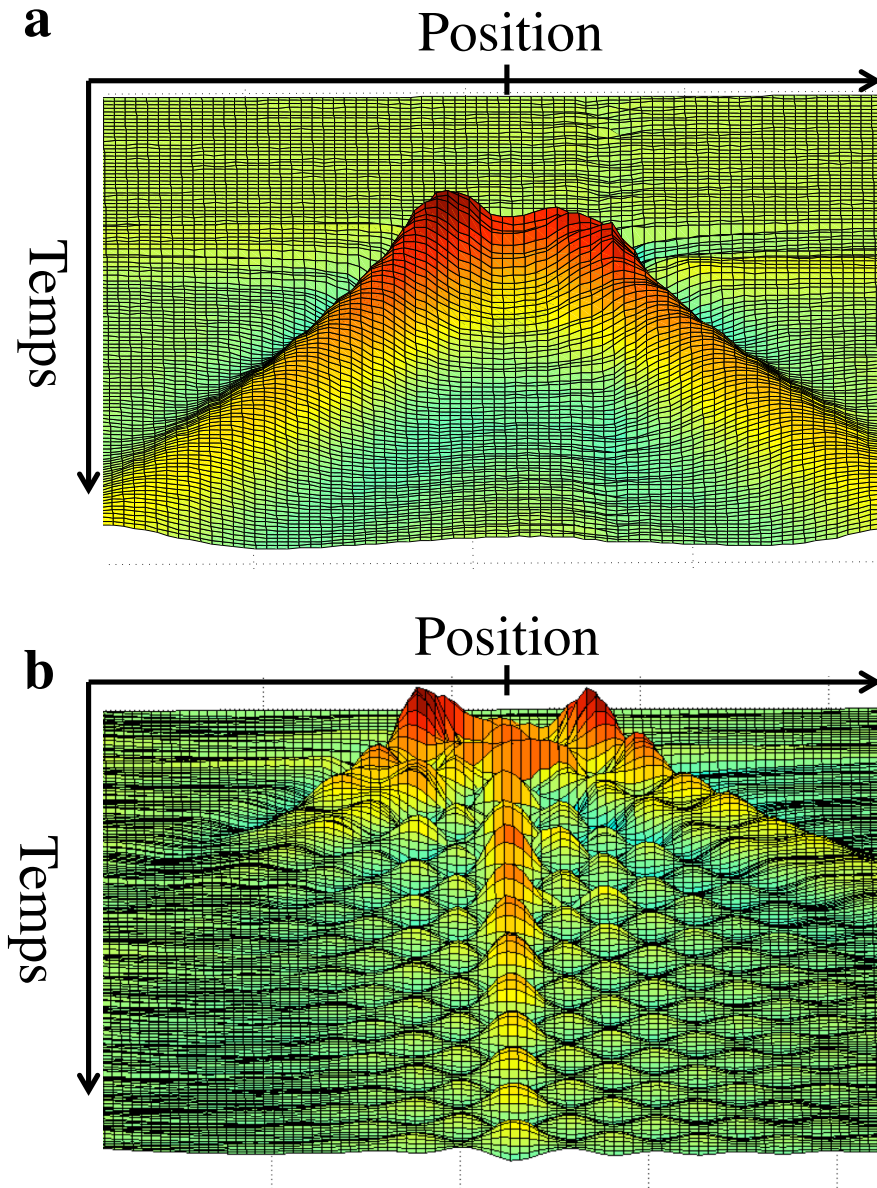


FIGURE 1.5 – Ondes émises par un impact ponctuel sur un bain en vibration.

Diagrammes spatio-temporels de la hauteur $h(x,t)$ de la surface en fonction du temps écoulé depuis l'impact, et de la distance à l'impact, figure non publiée tirée des travaux de A. Eddi. a) Bain au repos. Le front capillaire se propage simplement. b) Bain en vibration, pour une accélération γ proche du seuil de l'instabilité de Faraday γ_F . Le passage de l'onde capillaire excite sur son passage un motif d'ondes stationnaires. A chaque position donnée, les ondes stationnaires s'amortissent ensuite lentement, avec un temps d'amortissement τ appelé le temps de mémoire. La surface du bain conserve donc, via cette onde stationnaire, une mémoire de la position de l'impact durant un temps τ .

ment en réglant l'amplitude d'excitation du bain liquide au voisinage du seuil de l'instabilité de Faraday.

1.2.3 Goutte rebondissante : un excitateur local d'onde de Faraday

Une goutte rebondissant indéfiniment à la surface d'un bain de liquide en vibration verticale est un bon candidat pour exciter ces ondes stationnaires de Faraday. Nous verrons dans ce paragraphe que le mécanisme de génération d'ondes stationnaires de Faraday par une goutte rebondissante est d'ailleurs à l'origine de sa mise en marche spontanée [74, 63].

Une synchronisation nécessaire entre période de la goutte et période des ondes

Au cours de la thèse de Suzie Protière, les différents régimes de rebonds d'une goutte sur un bain en vibration ont été étudiés pour plusieurs fréquences de vibration, plusieurs viscosités du liquide, dans une large gamme d'accélération et de tailles de gouttes [73]. Dans cet espace des phases à quatre paramètres, seules quelques zones permettent d'observer des gouttes se déplaçant à la surface du bain.

Un diagramme de phases des différents modes de rebonds d'une goutte est présenté en figure 1.6, en fonction de l'accélération γ_0 de l'excitation du pot vibrant et du diamètre des gouttes D , pour une viscosité ν donnée du liquide ($\nu = 50.10^{-3}$ Pa.s), et une fréquence f_0 de vibration donnée ($f_0 = 50$ Hz). La zone correspondant aux marcheurs est notée "W".

Pour générer des ondes stationnaires de Faraday, une goutte doit d'abord rebondir à la même période que les ondes. La condition de synchronisation de la période de rebond avec la période des ondes de Faraday impose une condition sur l'accélération du bain, qui doit être de l'ordre de $4g$, où g est l'accélération de gravité. Comme le seuil de l'instabilité de Faraday est lié à la fréquence d'excitation f_0 du bain et à la viscosité ν du liquide, la condition de période double au voisinage du seuil impose ainsi une relation entre fréquence d'excitation et viscosité. Plus le bain est visqueux, et plus la fréquence d'excitation devra être faible pour observer des gouttes en doublement de période au voisinage du seuil de Faraday.

La fréquence de vibration f_0 choisie fixe alors la longueur d'onde de Faraday λ_F via la relation de dispersion de l'équation 1.1. Pour exciter des ondes à cette longueur d'onde λ_F , une goutte doit être de diamètre de l'ordre d'une fraction de λ_F ($0.1\lambda_F < D < 0.2\lambda_F$) [74].

Dans cette gamme de tailles et proche du seuil γ_F , une goutte va rebondir en

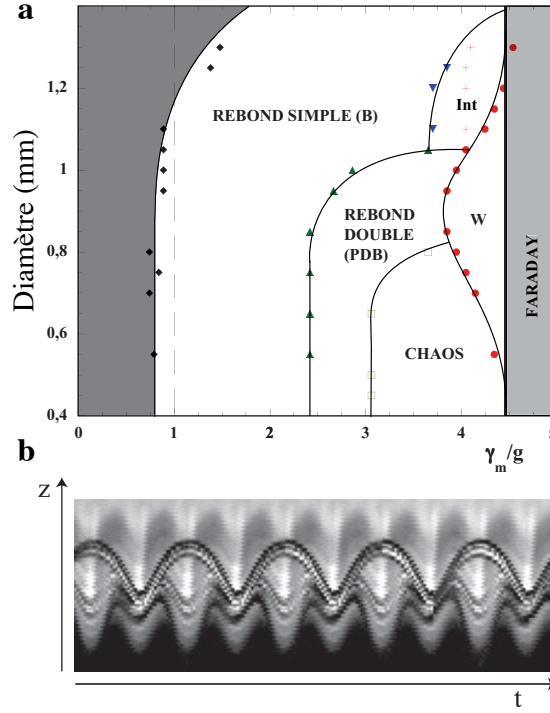


FIGURE 1.6 – **Régimes de rebond d'une goutte et zone de marche.** a) Diagramme de phases des différents régimes de rebond observés pour une huile de viscosité $\nu = 50.10^{-3}$ Pa.s, et une fréquence d'excitation $f_0 = 50$ Hz (*d'après* [73]). La zone de marche, où les gouttes se mettent spontanément en mouvement, est notée "W". Elle correspond à un espace restreint, au voisinage de l'instabilité de Faraday. b) Diagramme spatio-temporel du mouvement vertical d'une goutte en régime de marche, *d'après* [73]. La goutte impacte la surface toutes les deux oscillations du bain. Elle rebondit donc avec la même période que les ondes de Faraday qu'elle génère.

phase avec les ondes stationnaires de Faraday de période T_F qu'elle génère. La persistance de l'onde générée est donnée par le temps d'amortissement τ des ondes de Faraday au voisinage du seuil γ_F . On définit alors un paramètre de mémoire Me comme :

$$Me = \frac{\tau}{T_F} \quad (1.3)$$

Me est donc le rapport entre le temps d'amortissement τ des ondes et la période T_F du mouvement vertical. Ce nombre sans dimension est une mesure du nombre de sources d'ondes encore actives sur le bain. A chaque instant, le n -ème rebond précédent aura généré une onde dont l'amplitude vaut désormais $A_0 \exp(-n/Me)$. Ainsi, pour une mémoire $Me = 100$, les ondes générées par les cents derniers rebonds sur le bain pourront être considérées comme actives.

1.2.4 Mise en marche d'une goutte : un effet de mémoire

Le mécanisme d'accumulation d'ondes par effet de mémoire est à l'origine de la mise en marche d'une goutte. Pour un paramètre de mémoire $Me \approx 3$, le rebond vertical de la goutte devient instable vis à vis d'une perturbation horizontale, et la goutte se met en mouvement. La valeur correspondante γ_W d'accélération verticale du bain de liquide est appelée le seuil de marche. Elle dépend de la taille de goutte considérée (limite du domaine "W" de la figure 1.6). Deux modèles de bifurcation de marche ont été élaborés par Arezki Boudaoud [74] puis Jan Molacek, Anand Oza et John Bush [64, 65], ils seront discutés au chapitre 3. La présentation qui suit est une présentation brève du mécanisme d'instabilité.

En générant une bosse sous elle par accumulation des sources d'ondes générées, la goutte construit un maximum local d'énergie potentielle de pesanteur. Il existe une amplitude seuil de cette bosse pour laquelle le régime de rebond vertical immobile devient instable, celle ci se met alors en mouvement horizontal. Une fois la goutte en mouvement, les centres des ondes générées lors des précédents impacts seront légèrement décalés par rapport à la goutte qui retombe alors sur une surface inclinée. Le rebond sur une telle surface lui confère une quantité de mouvement horizontale, qui entretient le processus. A vitesse plus élevée, cette force s'équilibre avec la perte d'énergie à chaque rebond due en majorité à la génération de l'onde capillaire et en partie au frottement sur le film d'air [62]. Le marcheur atteint ainsi une vitesse stationnaire V_0 , appelée vitesse libre du marcheur.

Cette vitesse libre dépend à la fois du diamètre D de la goutte et de l'accélération γ_0 du bain. Au voisinage du seuil de marche γ_W , la vitesse croît comme $\sqrt{\gamma_0 - \gamma_W}$, indiquant une bifurcation de type supercritique. Cette vitesse sature ensuite pour des mémoires $Me \approx 10$. Nous nous intéresserons ici à la zone du régime de marche où la vitesse libre de la goutte V_0 varie peu, seul le temps τ d'amortissement des ondes, piloté par le paramètre de mémoire Me peut être considéré comme variable.

La mise en marche d'une goutte sous l'action des ondes qu'elle a elle même générées est donc une première manifestation d'un effet de mémoire. Cet objet présente la particularité de posséder, dans sa structure même, une forme de dualité onde-particule. Sans goutte, aucune onde ne peut se propager sous le seuil d'instabilité, et sans ondes, la goutte reste immobile. Que se passe-t-il pour une *mémoire de chemin* plus longue, *i.e* lorsque le champ d'onde devient plus complexe ?

1.3 La Mémoire de chemin

Une fois en mouvement, un marcheur laisse derrière lui des sources stationnaires d'ondes de Faraday. Cette accumulation de sources d'ondes le long du chemin suivi

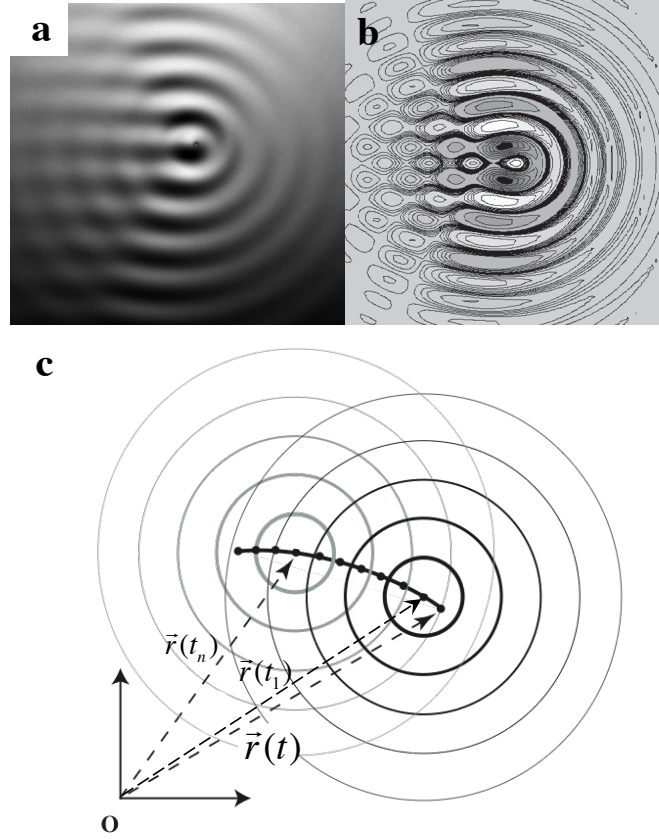


FIGURE 1.7 – **Champ d’onde d’un marcheur.** a) Visualisation du champ d’onde entourant un marcheur dans le régime de haute mémoire ($Me \approx 100$). b) Principe de construction du champ total. Le champ $h(\vec{\rho}, t)$ est obtenu par superposition linéaire de sources d’ondes émises aux instants t_n aux points $\vec{r}(t_n)$. c) Reconstitution numérique du champ d’onde à partir de la formule de l’équation 1.5. d) Lieux des points où le champ de surface $h(\vec{\rho}, t)$ est d’amplitude nulle. On retrouve les lignes paraboliques séparant l’avant et l’arrière du champ d’onde entourant un marcheur.

est appelée *mémoire de chemin*. Elle couple deux entités de nature très différentes, que sont la goutte et le champ d’onde qui l’entoure. Cette section est consacrée aux équations du mouvement d’un marcheur, en se basant sur les travaux effectués ces dernières années par A. Eddi, A. Boudaoud [74], E. Fort [41], J. Molacek [64], A.U. Oza [65], et leurs collaborateurs. Le but recherché est d’établir une équation modèle de la dynamique horizontale du marcheur, épurée, qui nous servira plus tard de base théorique.

1.3.1 Description du champ d’onde

La subtilité de la dynamique d’un marcheur réside dans l’évolution de la surface du bain liquide, déformée par l’accumulation d’ondes générées par les impacts répétés

de la goutte. Le champ total de déformation verticale h généré par une trajectoire $\vec{r}(t)$ s'écrit sous la forme :

$$h(\vec{\rho}, t) = h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(2\pi f_F t + \phi_0) J_0(k_F ||\vec{\delta r}_n||) e^{-(t-t_n)/Me} e^{-\delta r_n/\delta} \quad (1.4)$$

où $\vec{\rho}$ est le vecteur correspondant au point d'observation et $\vec{\delta r}_n = \vec{\rho} - \vec{r}(t_n)$ est la distance entre la position $\vec{r}(t_n)$ de la goutte à l'instant t_n du n -ème rebond précédent et le point d'observation. f_F désigne la fréquence de Faraday, moitié de la fréquence du forçage $f_0 = 2f_F$. h_0 correspond à l'amplitude de l'onde générée par un seul choc et vaut environ $h_0 \approx 50 \mu\text{m}$ et δ représente un coefficient d'amortissement visqueux spatial de l'onde gravito-capillaire au cours de sa propagation valant $\delta \approx 3\lambda_F$ pour une viscosité $\nu = 20.10^{-3} \text{ Pa.s}$, d'après [32]³. Enfin, ϕ_0 correspond à la phase d'impact de la goutte sur le bain.

Cette expression est à la base de la description du champ entourant un marcheur. Elle a été vérifiée expérimentalement par A. Eddi au cours de sa thèse en comparant le champ d'onde d'un marcheur en ligne droite avec celui obtenu à partir de l'équation 1.4. La figure 1.7 présente un tel champ d'onde sous diverses représentations. La figure 1.7a est une photographie d'un champ d'onde expérimental obtenue à l'aide d'une technique de visualisation d'interface [30]. Il existe en particulier deux lignes de démarcation entre avant et arrière, situées de part et d'autre du marcheur.

La construction géométrique du champ d'onde entourant un marcheur est résumée en figure 1.7c. Il est obtenu par somme de l'ensemble des sources générées en chaque point d'impact $\vec{r}_k(t)$ du marcheur. Chaque terme de la somme est pondéré par son amortissement temporel $\exp(-(n-k)/Me)$. Dans la limite de mémoire infinie, ce champ est analogue à celui généré par une demi-droite de source située derrière le marcheur. Il s'agit alors de la figure d'interférence en champ proche généré par un bord de Fresnel [48, 8]. La position de la goutte correspond alors à une singularité du champ d'onde définie par l'extrémité de la ligne de source.

La figure 1.7b présente un champ d'onde reconstitué à partir de l'équation 1.4, en bon accord avec le champ d'onde observé de la figure 1.7a. On peut remarquer en particulier que les lieux d'amplitude nulle du champ coïncident

L'expression de l'équation 1.4 décrit donc bien le champ généré par l'accumulation d'ondes circulaires, partout, et à tout instant. En revanche, la présence de deux termes d'amortissement (spatiaux et temporel) rend la structure d'un tel champ complexe à manipuler mathématiquement. Dans le cas de trajectoires confinées,

3. L'expérience montre que la longueur d'amortissement δ est probablement bien supérieure. Cet écart pourrait être imputable à la différence d'énergie cinétique au moment de l'impact entre une bille d'acier lâchée de plusieurs centimètres, et le rebond d'une goutte rebondissant sur un bain à une hauteur millimétrique, de l'ordre de 10^4 fois inférieure.

on peut négliger l'amortissement spatial tant que l'extension des trajectoires est inférieure à la longueur d'amortissement δ . Dans toute la suite, on prendra donc $e^{-\delta r_n/\delta} = 1$ quelle que soit la valeur de δr_n . Cette limite d'amortissement spatial nul permettra de simplifier considérablement la description du champ d'onde (voir chapitre 4 : décomposition en modes).

Par ailleurs, comme les rebonds de la goutte sont synchronisés sur l'oscillation verticale du motif de Faraday, l'interaction s'effectue toujours à la même phase du mouvement vertical du bain. On peut donc approximer le champ d'onde oscillant à la fréquence de Faraday par un champ stationnaire, pris à la phase d'interaction entre la goutte et le bain :

$$h = h_0 \sin(\phi_0) \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_F ||\vec{\delta r}_n||) e^{-n/\text{Me}} \quad (1.5)$$

où ϕ_0 représente la phase d'impact de la goutte sur le bain. Le champ résultant h est donc une somme de fonctions de Bessel amorties en temps, avec ajout d'un terme proportionnel à $J_0(k_F ||\vec{\delta r}_n||)$ à chaque impact de la goutte. En l'absence d'amortissement spatial, les ondes stationnaires circulaires J_0 générées à chaque impact deviennent solutions exactes de l'équation de Helmholtz :

$$\Delta J_0 + k_F^2 J_0 = 0 \quad (1.6)$$

Cette relation étant linéaire, par principe de superposition, le champ total généré par un marcheur est également solution de l'équation de Helmholtz :

$$\Delta h + k_F^2 h = 0 \quad (1.7)$$

Notons tout de même que dans cette description, le champ au moment de l'impact est modifié brusquement en tout point, par ajout d'une nouvelle source d'onde. Il y a donc à chaque période du rebonds une discontinuité *globale* de h , la nouvelle source modifiant le champ dans tout l'espace. Ce terme de sources récurrent revient à modifier les conditions aux bords de l'équation 1.7 à chaque impact de la goutte. h est donc une solution un peu particulière de l'équation de Helmholtz standard, puisque ses conditions aux limites ne sont pas immuables, mais soumises à une modification périodique. C'est d'ailleurs la modification périodique de ces conditions aux bords qui assure le couplage du champ avec la goutte.

D'une expression complexe du champ d'onde de surface, on se ramène donc à une solution par morceau de l'équation de Helmholtz, obtenue par somme de fonctions de Bessel J_0 générées à chaque impact. L'amplitude de chacune d'entre elles diminue au cours du temps, avec un poids $e^{-n/\text{Me}}$ où n est le nombre de rebonds écoulés. A chaque impact, une fonction de Bessel J_0 centrée sur la position de la goutte est ajoutée au champ. Cette expression du champ d'onde sera utilisée tout au long de cette thèse, pour décrire le champ d'onde d'un marcheur.

1.3.2 Couplage de la goutte au champ

Une goutte rebondissant sur une surface inclinée acquiert, par rebond élastique, une quantité de mouvement horizontale qui peut la mettre en mouvement. Ce mécanisme est à l'origine de la force générée par les ondes sur la goutte.

Rebond d'une goutte sur une interface inclinée

L'action des ondes sur la goutte peut être décrite par une force F_m "de mémoire", exercée par les ondes sur la goutte. Elle est proportionnelle à la pente de l'interface au lieu de l'impact :

$$\vec{F}_m(\vec{r}) = -m_G \gamma_0 (1 - \beta) \vec{\nabla} h|_{\vec{\rho}=\vec{r}} \quad (1.8)$$

où m_G désigne la masse de la goutte, $h(\vec{r}, t)$ représente la hauteur de la surface du bain, \vec{r} la position de la goutte à l'instant t , γ_0 l'accélération du pot vibrant, et $1 - \beta$ le rapport du temps passé en contact avec le bain par la période T_F du mouvement vertical⁴. Cette force provient du rebond de la goutte sur une pente inclinée, qui lui confère une quantité de mouvement horizontale, en plus de son mouvement vertical périodique. En dépit de la complexité du processus de rebond, le couplage entre la goutte et la surface liquide peut être décrit par cette relation de couplage linéaire en h de l'équation 1.8.

Comme l'amplitude de l'onde entourant un marcheur ($\approx 50\mu\text{m}$ [31]) est faible devant la hauteur z_0 des sauts de la goutte ($z_0 \approx g/2(T_F/2)^2 \approx 1\text{ mm}$ avec g l'accélération de gravité), la phase de rebond peut être considérée comme indépendante de l'amplitude des ondes qui ont été générées. Cette hypothèse permet de découpler le mouvement horizontal du mouvement vertical. Dans la suite, nous ne considérons donc que les composantes horizontales des forces appliquées, en considérant un mouvement vertical périodique non perturbé.

Dissipation à chaque impact

A chaque rebond, la goutte va également dissiper une partie de son énergie cinétique initiale. Des mesures expérimentales et une étude analytique approfondie réalisées par J. Molacek ont montré que la majeure partie de l'énergie dissipée lors du choc était due à l'émission de l'onde capillaire, qui va elle-même générer l'onde stationnaire de Faraday. L'énergie perdue par la goutte lors de l'impact n'est donc pas entièrement dissipée, mais stockée sous forme d'onde dans le champ h de surface [63]. Une partie de cette énergie sera alors restituée à la goutte lors des impacts suivants, celle-ci rebondissant sur la pente des ondes précédentes. Finalement, la

4. voir [73] p53 pour plus de détail. La force F_m résultante est de l'ordre de 10^{-6} N .

perte d'énergie par choc peut être modélisée par une force de friction visqueuse phénoménologique \vec{F}_v :

$$\vec{F}_v = -\frac{\eta}{1-\beta}\vec{V} \quad (1.9)$$

Cette force s'exerce durant le temps de contact $(1-\beta)T_F$ avec le bain, où η est un coefficient de friction effectif moyen du mouvement horizontal. En effet, le coefficient de frottement $\eta/(1-\beta)$ est associé à une puissance dissipée $P_c = \eta V^2/(1-\beta)$ par la goutte durant le contact avec le bain d'une durée $(1-\beta)T_F$. L'énergie dissipée en moyenne sur une période T_F du mouvement vertical est donc $\langle E_\eta \rangle = \eta V^2 T_F$.

Passage à la limite continue

A partir des équations discrètes du mouvement, J. Molacek et J. Bush ont proposé une équation continue pour le mouvement horizontal du marcheur [64].

Pour établir cette équation continue, revenons tout d'abord à la description du mouvement en deux phases. On considérera un mouvement vertical non modifié par les éventuelles forces extérieures appliquées \vec{F} , *i.e.* $\vec{F} \cdot \vec{e}_z \ll m_G g$ pour effectuer uniquement un bilan horizontal de quantité de mouvement.

Durant le vol libre, le bilan horizontal de quantité de mouvement s'écrit :

$$m_G \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_{ext} \quad \text{pour } 0 < t < \beta T_F \quad (1.10)$$

où βT_F est le temps passé en l'air sur une période T_F du mouvement vertical et \vec{F}_{ext} représente la composante horizontale des forces extérieures appliquées.

Durant la phase de contact avec le bain, la goutte subit une force de friction effective, et une interaction avec le champ d'onde généré :

$$m_G \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{\eta}{1-\beta}\vec{V} - m_G \gamma_0 (1-\beta) \vec{\nabla} h + \vec{F}_{ext} \quad \text{pour } \beta T_F < t < T_F \quad (1.11)$$

On peut alors effectuer un bilan de quantité de mouvement horizontal sur une période du mouvement :

$$m_G (\delta V)_1 = \vec{F}_{ext} \beta T_F \quad \text{pour } 0 < t < \beta T_F \quad (1.12)$$

$$m_G (\delta V)_2 = -\eta \vec{V} T_F - \gamma_0 T_F (1-\beta)^2 \vec{\nabla} h + \vec{F}_{ext} (1-\beta) T_F \quad \text{pour } \beta T_F < t < T_F \quad (1.13)$$

Par sommation, on obtient donc :

$$m_G \frac{(\delta V)_1 + (\delta V)_2}{T_F} = -\eta \vec{V} - m_G \gamma_0 (1-\beta)^2 \vec{\nabla} h + \vec{F}_{ext} \quad (1.14)$$

Comme la distance parcourue à chaque période T_F est petite devant la longueur d'onde ($VT_F \approx \lambda_F/20$), ces équations peuvent être approximées par une évolution continue de la vitesse horizontale du marcheur :

$$m_G \frac{d\vec{V}}{dt} = -\eta \vec{V} - C \vec{\nabla} h + \vec{F}_{ext}. \quad (1.15)$$

où $C = m_G \gamma_0 (1 - \beta)^2$ est un coefficient de couplage effectif entre la goutte et le champ d'onde associé, et η un coefficient de friction effective. L'équation 1.15 est donc à deux dimensions d'espace.

1.3.3 Equation de la dynamique d'un marcheur

En résumant les différentes composantes de la dynamique présentées ci-dessus, l'équation du mouvement d'une goutte s'écrit :

$$m_G \frac{d\vec{V}}{dt} = -\eta \vec{V} - C \vec{\nabla} h|_{\vec{\rho}=\vec{r}} + \vec{F}_{ext} \quad (1.16)$$

$$h(\vec{\rho}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_F ||\vec{\rho} - \vec{r}(t_n)||) e^{-n/Me}. \quad (1.17)$$

où \vec{V} désigne la vitesse de la goutte, m_G sa masse, η un coefficient de friction phénoménologique et $C = \gamma_0 (1 - \beta) h_0 \sin(\phi_0)$ une constante de couplage entre la goutte et le champ d'onde qui l'entoure, qui dépend en particulier de la phase ϕ_0 du mouvement vertical au moment de l'impact de la goutte. Le champ h est donc maintenant une grandeur sans dimension. Dans cette formulation des équations, il s'agit d'un système étendu en temps, via la mémoire de chemin, et étendu en espace, via le champ d'onde.

1.4 Une dynamique singulière à explorer

Les équations constitutives d'un marcheur présentent peu d'analogues, en raison de l'introduction de cette mémoire de chemin *ondulatoire*. Le support de la mémoire est en effet des ondes de surfaces qui sont soumises à un principe de superposition global : l'ajout d'une nouvelle onde modifie l'ensemble du champ résultant. Cette nouveauté pose un problème de formalisme : quels outils utiliser pour décrire une telle dynamique ?

1.4.1 Interprétation des équations : une dynamique duale

Une des premières questions soulevées par cette mémoire de chemin, et qui sera d'ailleurs abordée au cours de ce manuscrit, est l'aspect réductible ou non de ces équations à une situation plus simple. La figure 1.8 présente une photographie d'un marcheur composé d'une goutte et d'un champ d'onde complexe environnant, généré par la trajectoire suivie précédemment (trait blanc). A chaque instant, ce marcheur peut être défini par sa position, sa vitesse, le champ d'onde qui l'entoure, et la trajectoire suivie dans le passé. Pourtant, pour décrire l'évolution temporelle de la

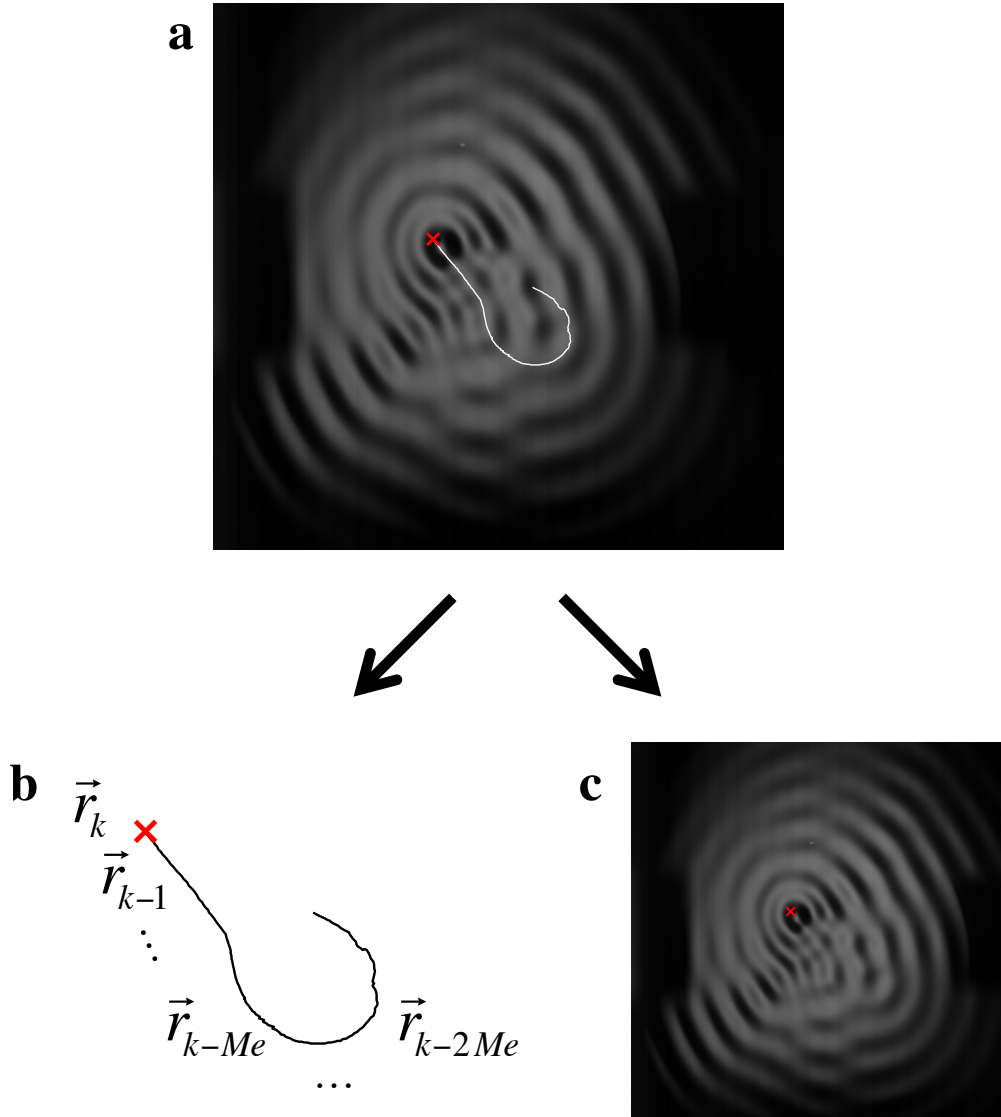


FIGURE 1.8 – **Illustration du caractère dual de la dynamique d'un marcheur.** a) Photographie d'un marcheur ayant parcouru une trajectoire complexe $\vec{r}(t_k)$. La trajectoire suivie a été superposée en trait blanc au champ d'onde environnant. Pour étudier l'évolution dans le temps de la dynamique de ce marcheur, deux points de vue peuvent être adoptés. **b) Point de vue corpusculaire.** Les variables du système sont les positions \vec{r}_k des impacts successifs de la goutte sur le bain. Le système est *ponctuel* en espace : à chaque instant est associée une unique position. En revanche, la dynamique présente des corrélations en temps (phénomène de mémoire). **c) Point de vue ondulatoire.** Les variables du système sont la position et la vitesse instantanées de la goutte (\vec{r}, \vec{V}) , ainsi que l'ensemble du champ d'onde qui l'entoure. Cette description est *ponctuelle* en temps : l'ensemble de l'information nécessaire peut être connue à un instant donné. En revanche, le système est maintenant étendu en espace.

dynamique, connaître toutes ces informations en même temps n'est pas nécessaire. La connaissance de l'ensemble de la trajectoire suivie par un marcheur suffit à calculer le champ d'onde environnant, et donc à décrire l'état futur. Il s'agit alors d'une vision *corpusculaire*. De manière duale, la connaissance de la position de la goutte à un instant t et de l'ensemble du champ d'onde qui l'entoure suffit à décrire son état futur. Il s'agit alors d'une vision *ondulatoire*. Ces deux points de vue peuvent être illustrés à partir de l'équation 1.16 et 1.17.

Point de vue corpusculaire

Si l'on considère comme variables pertinentes l'ensemble des positions passées de la goutte $\{\vec{r}(t_n)\}$ aux instants t_n des rebonds, le champ h n'est qu'un intermédiaire de calcul permettant de calculer la force en $\vec{r}(t)$. Les équations du mouvement pour un marcheur deviennent :

$$m_G \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\eta \frac{d\vec{r}}{dt} + k_F C \sum_{n=1}^{\infty} J_1(k_F ||\vec{r} - \vec{r}(t_n)||) e^{-n/Me} \frac{\vec{r} - \vec{r}(t_n)}{||\vec{r} - \vec{r}(t_n)||} \quad (1.18)$$

en utilisant la relation de dérivation de la fonction de Bessel d'ordre 0, $J'_0 = -J_1$. Il s'agit donc d'une vision *corpusculaire* de la dynamique où la goutte est sensible à son propre passé comme illustré en figure 1.8b). En revanche, le champ d'onde a disparu des équations, sans qu'aucune information ne soit perdue. Le marcheur est dans cette vision un système étendu en temps, mais non étendu en espace.

Point de vue ondulatoire

De manière duale, on peut considérer le champ h comme une variable du système, soumise également à une équation d'évolution dans le temps en réécrivant l'équation 1.5 sous la forme :

$$h(\vec{\rho}, t_0) = e^{-\frac{t-t_1}{MeT_F}} h(\vec{\rho}, t_1) + J_0(k_F ||\vec{\rho} - \vec{r}(t_0)||) \quad (1.19)$$

où t_0 représente l'instant du rebond actuel, et t_1 l'instant du dernier rebond. Pour $Me \gg 1$, on a $\exp(-(t - t_1)/MeT_F) = 1 - (t - t_1)/MeT_F$. Une limite continue pour l'évolution du champ d'onde peut être obtenue en considérant des variations lentes devant la période verticale, *i.e.* $h(\vec{\rho}, t_0) - h(\vec{\rho}, t_1) \sim T_F dh(\vec{\rho}, t)/dt$.

$$m_G \frac{d\vec{V}}{dt} = -\eta \vec{V} - C \vec{\nabla} h|_{\vec{\rho}=\vec{r}} \quad (1.20)$$

$$T_F \frac{d}{dt} h(\vec{\rho}, t) = -\frac{1}{Me} h(\vec{\rho}, t) + J_0(k_F ||\vec{\rho} - \vec{r}(t)||) \quad (1.21)$$

L'approximation d'évolution continue du champ d'onde a été utilisé à maintes reprises par J. Molacek *et al.* sous forme d'une expression intégrale pour l'étude de la

dynamique d'un marcheur [64]. Cette équation présente l'avantage d'être continue, ce qui permet d'utiliser les outils standards d'analyse des équations différentielles. Cependant, l'équivalence entre formulation discrète et continue de la dynamique n'est pas démontrée. En particulier, les limites de cette approximation continue sont peu maîtrisées.

Il s'agit alors d'un point de vue *ondulatoire*. Les effets de mémoire sont encodés dans une nouvelle variable qu'est le champ d'onde global h . Le système devient étendu en espace puisque le mouvement de la goutte dépend de l'ensemble du champ d'onde qui l'entoure. En revanche, les effets de mémoire ont été explicités : la dynamique devient *instantanée*.

Ces deux manières de suivre l'évolution temporelle d'un marcheur illustrent bien l'aspect dual de cette dynamique. L'aspect dual des équations d'un marcheur n'avait, à ma connaissance, pas été mentionné en ces termes. L'information minimale nécessaire à la description de la dynamique d'un marcheur permet de comprendre ce qui le distingue du mouvement d'un point matériel. Quelle que soit la force extérieure appliquée, la dynamique ne peut être réduite à des équations ponctuelles en temps et en espace à la fois. En revanche, elle peut toujours être réduite soit à des équations ponctuelles en temps, soit à des équations ponctuelles en espace.

1.4.2 Absence de déterminisme et quantification spontanée

Des expériences antérieures sur les marcheurs émergent deux types de comportements en lien étroit avec la mémoire de chemin qui n'ont pas été élucidés. Tous deux interrogent pourtant notre compréhension de la dynamique d'un marcheur.

Diffraction et absence de déterminisme

Le premier type de comportement a été observé dans une expérience de diffraction de marcheur à travers une fente, effectuée en 2006 [15]. En faisant passer un par un des marcheurs entre deux murs sous-marins réfléchissant les ondes de surface, une figure de diffraction typique de celle générée par une onde passant à travers une fente a été mise en évidence. Elle concerne la distribution de probabilité des angles α faits par chaque trajectoire avec l'axe perpendiculaire à la fente après que la goutte a passé la fente (voir figure 1.9). Cette figure de diffraction a pu être reproduite en simulations numériques, dont une illustration est donnée en figure 1.9. La déviation des trajectoires semble aléatoire, dans le sens où aucune corrélation simple entre trajectoire suivie et conditions initiales avant passage de la fente n'a pu être mise en évidence. On peut tout de même remarquer une forme d'extrême sensibilité aux conditions initiales, trois trajectoires obtenues pour des conditions initiales proches divergent en sortie de la fente. D'où peut provenir cette indétermination ? Est-elle

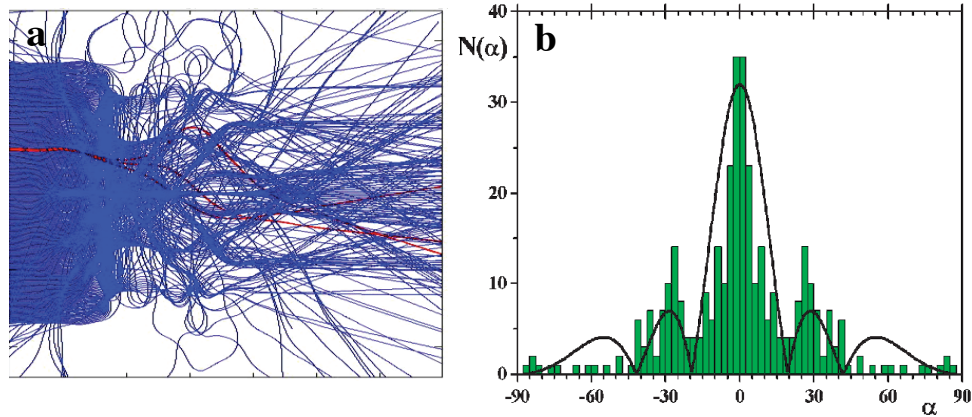


FIGURE 1.9 – **Simulations numériques de diffraction de marcheurs.** a) Superposition de l'ensemble des trajectoires passant à travers la fente. Trois d'entre elles obtenues pour des conditions initiales voisines ont été marquées en rouge. On observe une divergence des trajectoires en sortie de fente, soulignant l'extrême sensibilité aux conditions initiales. b) La statistique des angles de déviation en sortie de la fente produit une figure de diffraction analogue à celle d'une onde de longueur d'onde λ_F passant à travers la fente (simulation numérique par E. Fort).

due à un bruit expérimental, ou à une conséquence du guidage de la goutte par un champ d'onde complexe ?

En dépit de son caractère démonstratif, cette expérience de diffraction n'a pas apporté de réponse sur l'origine du caractère probabiliste des résultats. La complexité de la réflexion d'ondes de surface par des bords immergés rend la description théorique associée difficile à mettre en oeuvre. Dans la recherche de situations expérimentales plus simples il sera donc nécessaire de s'affranchir de la complexité d'une réflexion des ondes de surface sur un bord sous marin.

Trajectoires d'une particule, mais sélection d'origine ondulatoire

Une autre expérience effectuée sur des marcheurs soumis à une force transverse au mouvement met en évidence qu'à haute mémoire les rayons des orbites observées se quantifient. Le principe de l'expérience consiste à mettre le bain de liquide vibré en rotation autour de son axe vertical, comme le montre la figure 1.10. Dans le référentiel en rotation, le marcheur est alors soumis à une force de Coriolis en $2m\vec{V} \times \vec{\Omega}$ où Ω est la vitesse de rotation angulaire du bain. Dans le régime dit de haute mémoire, il a été montré que le rayon R des orbites circulaires suivies par la goutte prend des valeurs discrètes. Un modèle basé sur les contributions individuelles des ondes émises par la goutte a permis d'expliquer cette discrétisation [41]. Pourtant, cette approche ne permet pas d'étudier la *dynamique* d'un marcheur, ni le mécanisme

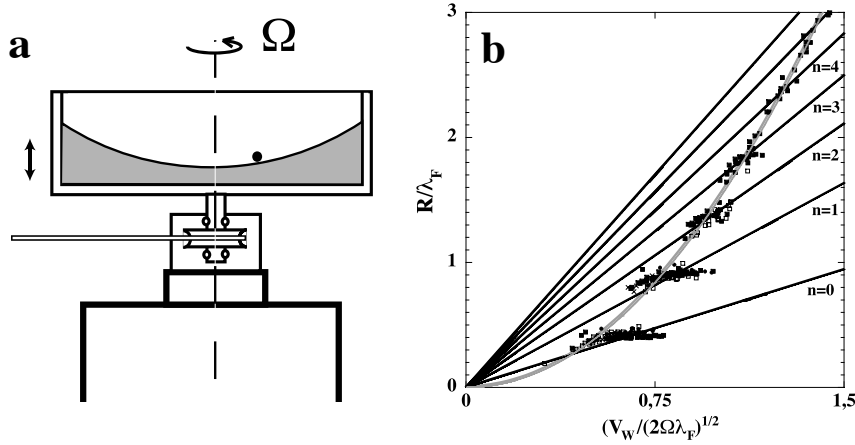


FIGURE 1.10 – **Confinement par une force transverse.** Figures d'après [41]. a) Le bain de liquide en vibration est mis en rotation autour de son axe vertical à une vitesse angulaire Ω de l'ordre de 1 rad.s^{-1} . Une goutte propulsée à une vitesse \vec{V} par les ondes est alors soumise dans le référentiel en rotation à une force de Coriolis $F_c = -2m_G \vec{V} \times \vec{\Omega}$, qui est toujours transverse au mouvement. b) Soumise à cette force de Coriolis, la goutte décrit une orbite circulaire dont le rayon R/λ_F est tracé en fonction d'un paramètre de confinement $(V_W/(2\Omega\lambda_F))^{1/2}$ (d'après [30]). Ces résultats expérimentaux mettent en évidence une discrétisation des orbites circulaires.

de sélection de ces orbites : comment, à partir d'une condition initiale donnée, la trajectoire peut-elle converger vers des états discrets ? Comment, via la mémoire de chemin, la goutte et l'onde qui l'entoure interagissent-elles de manière dynamique ?

1.5 Explorer la dynamique d'un marcheur : quelle expérience réaliser ?

Un marcheur est ainsi l'association dynamique d'une goutte et d'une onde, par l'intermédiaire de la *mémoire de chemin*. Rebondissant sur un bain en vibration verticale, une goutte génère à chaque impact une onde circulaire, qui vient s'ajouter à toutes celles générées précédemment. Au rebond suivant, la goutte subit une force horizontale exercée par la résultante de ces ondes générées. Par les expériences et les modèles préexistants, l'hydrodynamique sous-jacente a été bien caractérisée. Cette description a permis d'obtenir des équations régissant le mouvement horizontal de la goutte et du champ d'onde qui lui est associé.

Ces équations ne sont plus spécifiques à l'hydrodynamique : il s'agit du mouvement d'un point matériel à deux dimensions, qui génère dans son sillage des ondes stationnaires circulaires s'amortissant lentement dans le temps. Le champ total est issu de la superposition linéaire de toutes ces ondes, et exerce en retour une force

sur le mobile proportionnelle à la pente du champ.

L'équation du mouvement est donc connue, moyennant quelques approximations, mais n'est pas pour autant résolue. Le processus de couplage entre la goutte et son champ d'onde induit des corrélations temporelles qu'il est difficile de traiter du point de vue théorique.

Pour explorer cette dynamique, on se propose d'étudier un cas expérimental épuré, pouvant éventuellement être abordé aussi du point de vue théorique. Le procédé retenu est de confiner expérimentalement le marcheur dans un puits de potentiel harmonique. Cette configuration n'impose aucune condition au bord spécifique pour le champ d'onde, qui évoluera toujours dans un milieu libre. Seule la goutte sera confinée dans un puits de potentiel à symétrie circulaire.

La première exploration de ce type a été effectuée en appliquant au marcheur une force de Coriolis [41]. Dans ce cas de figure, il y a en effet pas de conditions aux bords particulières pour le champ d'onde, mais une sélection de la symétrie de l'orbite suivie : seules les trajectoires circulaires de même sens de rotation que le bain sont autorisées (force transverse au mouvement).

L'application d'une force centrale est moins restrictive : outre les orbites circulaires dans les deux sens de rotation, d'autres types de trajectoires pourraient être observées. Les seules contraintes exercées sont d'imposer un confinement et, à temps long, une symétrie centrale de la trajectoire suivie. Quels types de dynamiques peuvent émerger de cette nouvelle configuration ?

Chapitre 2

Dispositif expérimental : Comment confiner un marcheur dans un puits de potentiel

Ce chapitre présente le dispositif expérimental utilisé pour obtenir un marcheur et le soumettre à une force extérieure.

La présentation de ce dispositif est organisée comme suit. Une brève introduction du montage général sera tout d'abord présentée. Nous détaillerons ensuite les différentes composantes constituant le montage expérimental.

La première partie est consacrée dispositif permettant d'obtenir un bain vibré avec un bon contrôle sur l'excitation au voisinage du seuil de Faraday.

La seconde partie présente la méthode utilisée pour exercer une force extérieure sur un marcheur à l'aide d'un dispositif magnétique. La configuration retenue permet de piéger le marcheur dans un puits de potentiel harmonique. Ce dispositif sera utilisé au cours des chapitres suivants pour étudier la dynamique d'un marcheur dans ce puits de potentiel.

2.1 Vue d'ensemble

Avant de rentrer dans les détails des différentes parties du dispositif, nous présentons tout d'abord une vision synthétique des différents éléments permettant d'obtenir un marcheur sur un bain vibré, et de lui exercer une force à l'aide d'un dispositif magnétique.

La figure 2.1a présente un schéma synthétique du dispositif expérimental. Un bain d'huile silicone est mis en vibration verticale à une fréquence de 80 Hz. Cette accélération verticale est fournie par un pot vibrant, contrôlée par ordinateur. Pour une accélération de l'ordre de $4g$ où g est l'accélération de gravité, il se développe à la surface un motif d'ondes stationnaires, appelées ondes de Faraday. Juste en dessous du seuil d'apparition de ces motifs, une perturbation locale de l'interface générera des ondes de Faraday évanescences.

Dans ce régime de vibration du bain situé juste en dessous de l'instabilité de Faraday, une goutte d'huile silicone encapsulant du ferrofluide est générée, par retrait rapide d'une pointe plongeant dans une bicouche huile/ferrofluide. Celle ci se met spontanément en mouvement à la surface, à une vitesse de l'ordre du centimètre par seconde.

La présence de ferrofluide à l'intérieur de la goutte va alors permettre d'exercer sur elle une force extérieure. Un ferrofluide est une suspension de nano particules de fer dans un liquide, qui présente ainsi la particularité d'être sensible à un champ extérieur : d'aimantation nulle à champ extérieur nul, les particules du ferrofluide s'orientent partiellement en présence d'un champ extérieur. Le résultat est une aimantation proportionnelle au champ extérieur appliqué.

Pour conférer à la goutte un moment magnétique, un champ magnétique extérieur est généré par deux bobines parcourues par un courant I_0 qui génèrent un champ magnétique homogène \vec{B}_0 à la surface du bain (voir figure 2.1). La goutte peut ensuite être confinée par l'ajout d'un aimant placé au dessus de la surface du bain. La force exercée va dépendre de la distance d entre l'aimant et la surface, le confinement imposé au marcheur peut donc être réglé expérimentalement.

La configuration de champ magnétique retenue permet d'exercer une force linéaire en la distance au centre, analogue à celle exercée sur une masse attachée au bout d'un ressort. Dans cette configuration, le marcheur est alors piégé dans un puits de potentiel harmonique. Une technique de calibration a été mise au point pour mesurer la force effectivement appliquée sur une goutte rebondissant à la surface du bain.

Tout au long de cette étude, nous utiliserons principalement deux paramètres de contrôle : le paramètre de mémoire Me défini au chapitre 1, mesure du temps d'amortissement des ondes sur le bain. Celui ci est réglé par l'écart relatif entre l'accélération verticale imposée au bain de liquide et l'accélération au seuil de Faraday. Le second paramètre sera la raideur du puits de potentiel magnétique, qui fixera l'extension spatiale des trajectoires suivies par le marcheur.

Pour visualiser la goutte au cours du temps, une caméra est placée au dessus du dispositif. A l'aide d'un dispositif d'éclairage et de traitement des images par ordinateur, le mouvement de la goutte peut être repéré en direct. Cette technique nous

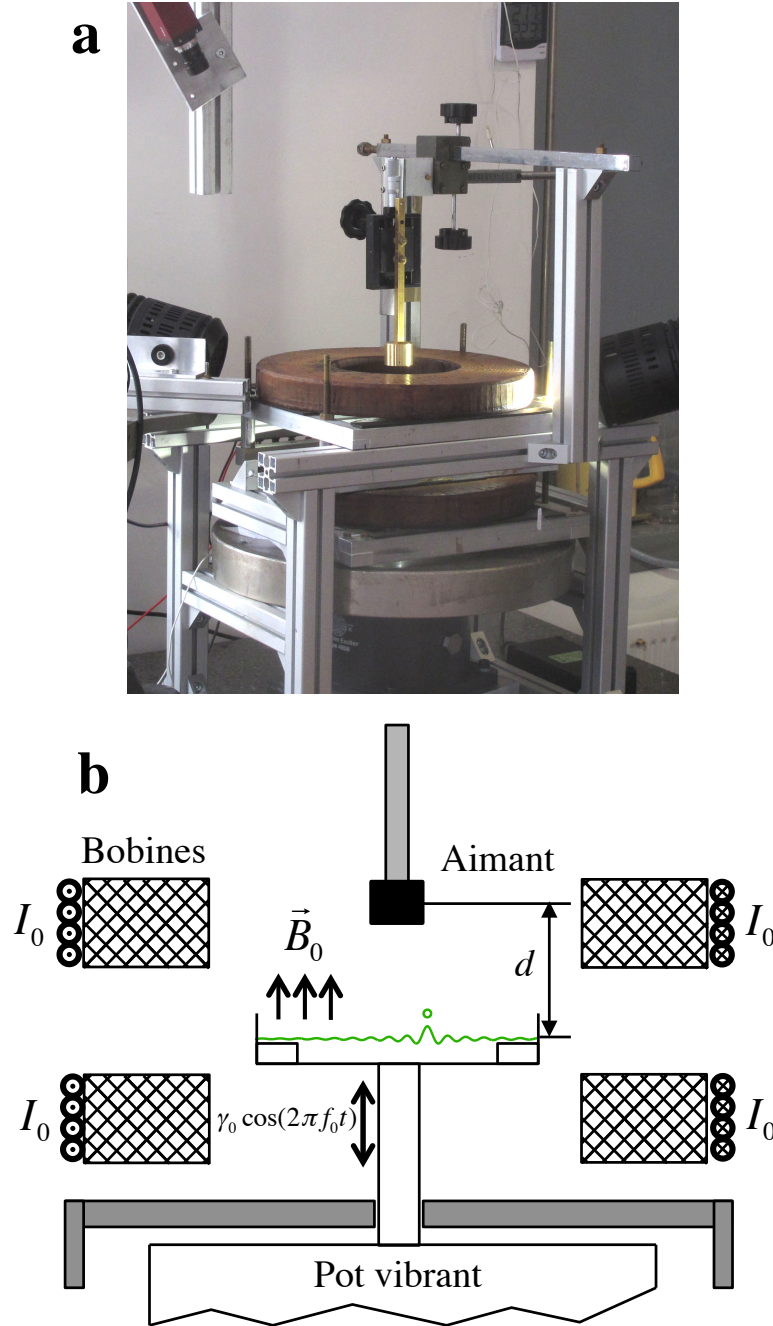


FIGURE 2.1 – **Dispositif expérimental : vue d'ensemble.** a) Schéma du dispositif expérimental. Un bain de liquide est mis en vibration verticale à l'aide d'un pot vibrant. Sur ce bain, une goutte contenant du ferrofluide est générée. Pour une accélération verticale proche du seuil de l'instabilité de Faraday, celle-ci se met spontanément en mouvement. Un champ magnétique homogène $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ est alors généré par deux bobines parcourues par un courant $I_0 = 1A$. L'ajout d'un aimant à la verticale du bain soumet la goutte à une force attractive. La configuration de champ magnétique utilisée permet de se ramener au cas d'un puits de potentiel harmonique à deux dimensions. b) Photographie du dispositif expérimental mettant en évidence les bobines (au centre, marron), le support en laiton de l'aimant (au centre, jaune brillant), la caméra (en haut à gauche, bordeaux), l'éclairage (milieu droit, noir), et le thermomètre (en haut à droite).

a permis de suivre les trajectoire suivies par le marcheur au cours de l'expérience.

La photographie de la figure 2.1b permet de visualiser quelques uns de ces éléments. On peut deviner les bobines de Helmholtz (marron), le support de l'aimant en laiton (jaune brillant), l'éclairage, la caméra, et le thermomètre. Le bain de liquide et à fortiori la goutte rebondissante sont masqués par l'armature de soutien des bobines, illustrant les problèmes possibles d'encombrement.

2.2 Bain vibrant et instabilité de Faraday

Le dispositif expérimental utilisé pour obtenir des marcheurs est en partie hérité des travaux précédents, réalisés au cours de la thèse de S. Protière [73] puis de A. Eddi [30]. La précision expérimentale requise pour obtenir un marcheur est raisonnablement accessible à l'aide de dispositifs peu coûteux. Par exemple, l'instabilité de Faraday, les régimes de marche ou les mouvements à deux gouttes en orbites l'une autour de l'autre ont pu être étudiés par des étudiants dans le cadre de projet de TIPE ou de projets expérimentaux au niveau licence.

En revanche, l'étude du mouvement d'un marcheur piloté par la *mémoire de chemin* nécessite une plus grande précision. Il s'agit alors de se placer au plus proche possible du seuil de l'instabilité de Faraday, par valeurs inférieures. Cette zone de travail requiert une maîtrise de plusieurs sources d'incertitude, comme l'homogénéité de la vibration, la variation du seuil de Faraday avec la température ou les courants d'air qui perturbent le mouvement de la goutte. L'ensemble du dispositif retenu a donc été conçu dans ce but : obtenir un bon contrôle de la mémoire de chemin pour étudier les comportements du marcheur au plus proche du seuil de l'instabilité de Faraday.

2.2.1 Obtenir un bain liquide vibré verticalement

Le schéma du dispositif est présenté en figure 2.2. Un bain d'huile silicone¹ d'épaisseur $h = 5$ mm est mis en vibration verticale à l'aide d'un pot vibrant à une accélération $\gamma = \gamma_0 \sin(2\pi f_0 t)$ où γ_0 désigne l'amplitude maximale d'accélération du pot vibrant et f_0 la fréquence d'excitation. La plage typique d'accélération utilisée est autour de $4g$ où g désigne l'accélération de gravité. Dans le cadre de cette thèse,

1. L'utilisation d'huile silicone présente plusieurs avantages. D'une part, la faible tension de surface ($\sigma = 20 \pm 1 \text{ mN/m}$) prévient l'accumulation de poussières en surface, qui peuvent briser le film d'air entre la goutte et le bain, provoquant ainsi la coalescence. Par ailleurs, la viscosité dépend faiblement de la température, ce qui diminue les variations du seuil de l'instabilité de Faraday en fonction de la température. Enfin, le faible taux d'évaporation permet de conserver une même goutte sans modification de taille pendant plusieurs jours.

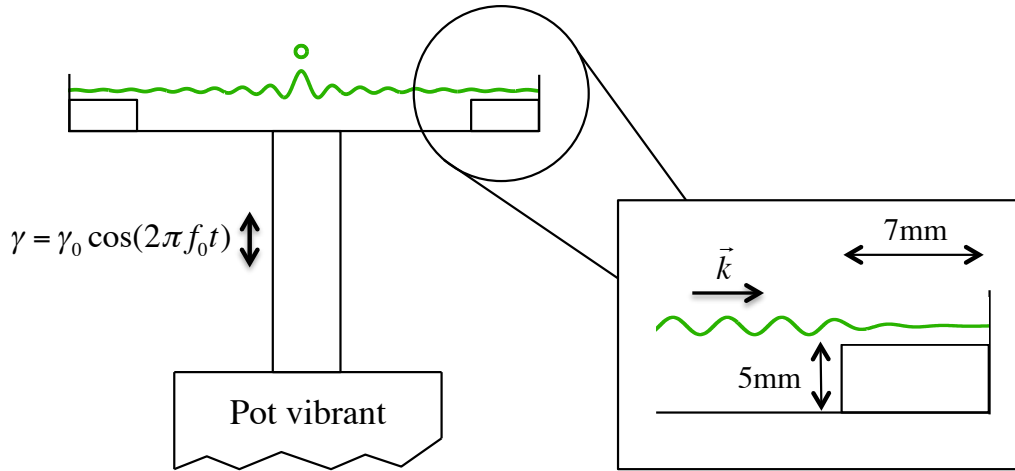


FIGURE 2.2 – **Dispositif expérimental.** Un bain d’huile silicone de viscosité $\nu = 20.10^{-3}$ Pa.s et de profondeur $h = 5$ mm est mis en vibration verticale sinusoïdale $\gamma = \gamma_0 \sin(2\pi f_0 t)$ à l’aide d’un pot vibrant, pour une accélération $\gamma_0 \approx 4g$ proche du seuil de l’instabilité de Faraday, et une fréquence $f_0 = 80$ Hz. L’ajout de bord sous-marin permet d’augmenter la dissipation visqueuse au voisinage des ménisques. Une onde de vecteur k incidente sur un bord sera ainsi réfléchi par les bords sous-marins. En revanche, une onde émise par les bords en vibration sera amorti par les bords avant d’atteindre le coeur de la cellule.

nous nous sommes astreint à une viscosité dynamique $\nu = 20.10^{-3}$ Pa.s, et une fréquence d’excitation $f_0 = 80$ Hz². La taille des gouttes marcheuses diminue avec la fréquence d’excitation f_0 . Pour la fréquence d’oscillation $f_0 = 80$ Hz utilisée, les gouttes générant une onde gravito-capillaire proche de la longueur d’onde de Faraday $\lambda_F = 4.75$ mm ont un diamètre $D = 600 \pm 50$ μm [73]. Le choix de ce couple viscosité/taille de goutte résulte d’un compromis entre minimisation de la dissipation visqueuse qui limite l’extension spatiale des ondes générées par un marcheur et gouttes de tailles suffisamment grosses pour limiter la sensibilité aux courants d’air.

Contrôle de l’excitation

L’accélération sinusoïdale du pot vibrant est contrôlée par ordinateur, via une carte d’acquisition Labview qui interface le pot vibrant. Le programme de contrôle de l’excitation du pot permet de générer un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 = 80$ Hz et d’accélération γ_0 de l’ordre de $4g$, avec une très bonne précision relative de l’amplitude d’excitation γ_0 ($< 0.1\%$). La phase du signal est également contrôlée pour éviter des variations abruptes de l’accélération lors d’un changement d’amplitude de

2. La correspondance entre fréquence et viscosité est donnée par les diagrammes de phase des régimes de marche de la thèse de S. Protière [73], et a été reprise sous forme de tableau dans la thèse de A. Eddi [30]. Un diagramme de phase plus détaillé a depuis été réalisé par J. Molacek [64]

vibration, qui peuvent provoquer la coalescence de la goutte avec le bain. Enfin, d'autres fonctionnalités ont été ajoutées au fur et à mesure des besoins. Citons par exemple des changements brefs dans l'amplitude d'excitation du pot qui permettent de modifier le rebond vertical de la goutte (cf Chapitre 8). Ce même programme a aussi été utilisé pour piloter le courant traversé par les bobines afin de faire varier dans le temps la force appliquée (cf Chapitre 7).

Caractéristique de la cellule

La cellule a été choisie circulaire pour respecter l'invariance par rotation de la force extérieure qui sera utilisée, et d'un diamètre intérieur de 140mm grand devant la longueur d'onde de Faraday. Sur un bain de liquide vibré, au delà du seuil d'accélération γ_F de l'instabilité de Faraday, il apparaît des motifs d'ondes stationnaires, qui peuvent présenter une grande diversité. Ces motifs dépendent de la taille et de la géométrie de la cellule voire des conditions initiales, en raison de la présence possible d'une hystérésis du seuil de l'instabilité [27]. En particulier, les conditions aux limites imposées par le ménisque sur les bords du bain joue un rôle important dans le déclenchement de l'instabilité [25]. En effet, la courbure de l'interface au voisinage d'une ligne de contact joue le rôle d'émetteur d'ondes qui pourrait déclencher localement l'instabilité de Faraday.

Pour éviter cette complexité générée par les ménisques, des fonds sous-marins surélevés sur le contour de la cellule ont été ajoutés, comme le montre l'insert la figure 2.2. Ces bords sous marins de 5mm de profondeur et 7mm de largeur sont recouverts d'une épaisseur d'huile d'environ 200 μm . Au dessus de ces barrières, la faible profondeur d'huile augmente largement le seuil de Faraday. Cette zone de faible profondeur atténue ainsi par viscosité les ondes émises par les ménisques. L'amplification des ondes de Faraday par forçage paramétrique s'effectuera donc loin des bords, toute la cellule pouvant alors être considérée comme homogène. Cette amélioration joue un rôle crucial dans le cas d'expériences à haute mémoire avec des marcheurs, en ce sens qu'elle assure une bonne homogénéité de l'excitabilité du milieu.

Pour un contrôle accru de l'homogénéité du milieu, quatre vis en laiton placées aux quatre points cardinaux de la cellule permettent d'équilibrer finement les moments d'inertie de la cellule à l'aide de poids additionnels, de l'ordre du gramme. Un bon réglage de la cellule est atteint lorsque, juste au dessus du seuil de l'instabilité de Faraday, les ondes se développent lentement sous forme d'un mode axisymétrique centré sur l'axe de symétrie de la cellule. Au bout de quelques minutes, celui ci laisse place à un motif carré d'ondes, parfaitement régulier.

2.2.2 Instabilité de Faraday et paramètre de mémoire

Mesure du seuil de l'instabilité de Faraday

La mesure du seuil de Faraday nécessite un soin particulier, puisqu'elle fixe la limite de précision de l'ensemble des mesures futures. En augmentant l'amplitude d'excitation du bain depuis l'état au repos, le seuil de Faraday observé s'avère légèrement supérieur à celui obtenu par diminution de l'excitation³. Cette hystérésis, bien que faible, doit néanmoins être pris en compte au vu de la précision de notre dispositif. Auquel de ces deux seuils un marcheur est-il sensible ? Dans la zone d'hystérésis, l'instabilité de Faraday peut être déclenchée par une perturbation d'amplitude finie, telle l'onde capillaire générée par le rebond d'une goutte. Pour cette raison, nous avons choisi de mesurer le seuil de Faraday en descendant, *i.e.* par diminution de l'excitation du pot vibrant jusqu'à ce que le motif d'ondes stationnaires disparaisse de la cellule. La valeur du seuil est mesurée directement en amplitude d'excitation du pot A_F , seule une valeur relative étant ici nécessaire. A noter que cette valeur évolue avec la température, et qu'une variation de l'ordre de 0.1 °C de la température de la pièce est perceptible sur les expériences les plus sensibles (chapitres 5, 7 et 8)^{4, 5}.

Distance relative au seuil de Faraday

Le but recherché est l'étude spécifique du régime de marche, observable uniquement dans un voisinage immédiat du seuil de Faraday γ_F . La grandeur physique pertinente associée est donc la distance relative au seuil de Faraday, qui pilote le temps d'amortissement des ondes générées par les rebonds de la goutte. L'amplitude A d'excitation du pot vibrant (en mV) est donc repérée directement par rapport à la mesure de l'amplitude d'excitation A_F du pot vibrant au seuil de Faraday. On définit ainsi un paramètre de mémoire Me^{exp} par :

$$Me^{exp} = \frac{A}{A_F - A} \quad (2.1)$$

3. $(A_{montant} - A_{descendant})/A_{descendant} \approx 0.5\%$.

4. L'ajout d'un dispositif de régulation de température cause plus de problèmes qu'il n'en résout en raison de la grande sensibilité d'une goutte aux courants d'air. Une fois ces effets pris en compte, on arrive à une précision effective de la mesure du seuil de Faraday de l'ordre de 0.5 %, estimée sur un jeu de 20 expériences différentes, pour des jours différents. La dérive possible du seuil de Faraday et sa non homogénéité résiduelle sont parmi les principaux facteurs de limitation de la précision de ces expériences

5. Pour une même expérience, dans des conditions de température stable, la précision relative peut être augmentée, grâce à la moindre variation du seuil au cours du temps. Pour cette raison, les mesures les plus précises obtenues au cours de cette thèse ont été réalisées avec des gouttes uniques.

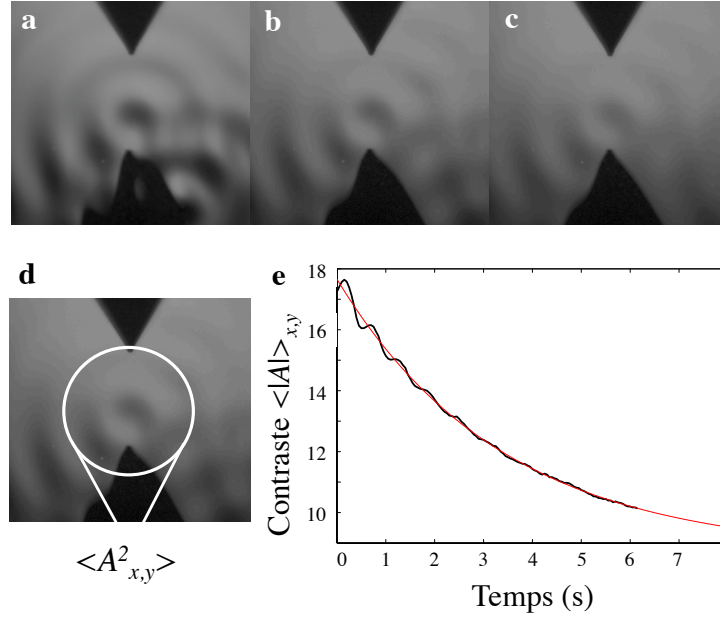


FIGURE 2.3 – **Mesure directe du paramètre de mémoire Me.** Après coalescence ou sortie du champ de vision du marcheur, le champ d'onde généré précédemment décroît exponentiellement en amplitude. a),b),c) Photographies du champ laissé par le marcheur, respectivement 2, 3 et 4 secondes après le départ du marcheur. Cette décroissance du champ d'onde généré peut être mesurée au cours du temps. d) Illustration de la technique de mesure du contraste : sur un cercle de diamètre $2\lambda_F$ centré sur le champ laissé par le marcheur, la moyenne quadratique de l'intensité du champ $\langle A^2 \rangle_{x,y}$ (le contraste) est calculé à chaque instant t . e) Décroissance du contraste au cours du temps, ajustement par une exponentielle décroissante, qui donne un temps de mémoire $\tau = 3.4 \pm 0.15$ s, soit $Me = 135 \pm 10$. A comparer avec la mesure par l'écart relatif au seuil de Faraday : $Me^{exp} = 200 \pm 100$.

La valeur de A utilisée est d'au plus 15% inférieure à la valeur A_F du seuil. Pour cette faible gamme de variations, le rapport des amplitudes peut être considéré comme égal au rapport des accélérations. On en déduit le paramètre de mémoire Me , défini par :

$$Me = \frac{\gamma}{\gamma_F - \gamma} \quad (2.2)$$

La limite de précision de ce dispositif expérimental provient alors de la mesure du seuil de Faraday. Cette mesure est d'autant plus critique au voisinage immédiat du seuil. Par exemple pour $Me = 100$, une précision de 10% sur la valeur de Me nécessite de connaître l'amplitude du seuil A_F de Faraday à $1/100 \times 10\% = 0.1\%$.

Mesure directe du paramètre de mémoire

Pour les expériences effectuées au plus près du seuil de l'instabilité de Faraday, la mesure de la distance relative au seuil $\gamma_F - \gamma_0$ perd nécessairement de sa précision. Une technique directe de mesure du paramètre de mémoire Me à partir du champ d'onde observé a donc été mise au point.

Le principe consiste à mesurer le champ après que le marcheur est parti de la zone d'observation. Une telle situation peut être obtenue à la coalescence accidentelle⁶ ou forcée d'un marcheur, ou bien lorsque celui ci s'échappe de la zone d'observation (voir chapitre 7). Dans ce cas, le champ d'onde laissé par le marcheur va s'amortir au cours du temps, jusqu'à ce que la surface du bain revienne à une situation au repos. Les figures 2.3a, b et c présentent cette décroissance du champ au cours du temps sous forme de trois photographies prises à des intervalles d'une seconde. On peut voir que le champ d'onde laissé par le marcheur décroît lentement dans le temps. La décroissance de l'amplitude du champ au cours du temps peut être mesurée à partir du contraste de la photographie. On note $A(x, y, t)$ l'amplitude mesurée du champ. L'amplitude moyenne $\langle |A| \rangle_{x,y}$ est calculée à chaque instant, sur un disque de diamètre $2\lambda_F$ centré sur l'amplitude maximale du champ :

$$\langle |A|^2 \rangle_{x,y} = \frac{1}{\pi \lambda_F^2} \int \int_{x^2+y^2 < \lambda_F^2} dx dy (|A|(x, y, t) - \langle |A| \rangle_{x,y})^2 \quad (2.3)$$

La figure 2.3d présente cette amplitude moyenne $\langle |A| \rangle_{x,y}$ du champ au cours du temps. On observe une décroissance exponentielle avec un temps caractéristique $\tau = 3.4 \pm 0.15$ s (ajustement par une courbe exponentielle représentée par la courbe rouge). Comme $A(x, y, t)$ est proportionnelle à la pente de l'interface⁷, ce temps caractéristique est bien le temps de mémoire, qui donne en l'occurrence un paramètre de mémoire $Me = 135 \pm 10$ à comparer avec une mesure du seuil à l'aide de l'équation 2.2 égale à $Me^{exp} = 200 \pm 100$. Cette méthode permet donc de mesurer directement le paramètre de mémoire avec une bien meilleure précision.

6. Ou coalescence provoquée sur une pointe aimantée : grâce à l'utilisation de gouttes sensibles au champ magnétique, il est possible de capturer une goutte à l'aide d'une pointe magnétique.

7. Voir détail page 34 de la thèse de A. Eddi [30].

2.3 Création, magnétisation, et confinement d'un marcheur

Cette section présente le dispositif magnétique permettant de confiner un marcheur dans une région réduite de l'espace. Le confinement repose sur l'utilisation de *ferrofluide* encapsulé au sein d'une goutte d'huile silicone. Le ferrofluide est un liquide paramagnétique composé de nano-particules de fer qui présente la particularité d'être sensible à un champ magnétique extérieur. Une goutte diphasée huile/ferrofluide, plongée par exemple dans le champ d'un aimant permanent subira donc une force d'attraction magnétique analogue à celle qui oriente et attire un barreau de fer placé au voisinage d'un aimant permanent. On se propose tout d'abord de présenter la technique retenue pour encapsuler du ferrofluide, et d'en déduire la force exercée par un champ magnétique extérieur sur une telle goutte. Nous présenterons alors la configuration de champ magnétique retenue, qui permet de plonger la goutte dans un puits de potentiel harmonique.

2.3.1 Une goutte diphasée huile/ferrofluide

Pour exercer une force sur un marcheur, une goutte sensible au champ magnétique doit tout d'abord être générée. Pour cela, le ferrofluide s'est révélé être une solution adéquate : la présence de nanoparticules paramagnétiques en suspension lui confère une susceptibilité magnétique constante sur une large gamme de champs magnétiques appliqués. Afin de modifier au minimum les propriétés de déformation et de rebond de la goutte, il a été choisi d'encapsuler une gouttelette de ferrofluide à l'intérieur d'une goutte d'huile silicone usuelle.

Utilisation de ferrofluide

Pour les besoins de l'expérience, deux types de ferrofluides ont été utilisés, donnés gracieusement par J.C. Bacri et F. Gazeau. L'un aqueux, de faible concentration et de susceptibilité $\chi_0 \approx 0.1$ et l'autre à base de Glycérol de susceptibilité magnétique très élevée $\chi_0 = 2.6^8$.

Création d'une goutte diphasée

La technique de génération d'une goutte diphasée huile/ferrofluide est illustrée en figure 2.4. Une petite flaque de ferrofluide est déposée dans un coin de la cellule, qui coule au fond du bain en raison de sa plus grande densité. Le ferrofluide déposé

8. Ce ferrofluide à base de Glycérol avait été utilisé pour des expériences de convection thermique lors de la thèse de J. Broaweys, une caractérisation complète est disponible dans son manuscrit [10].

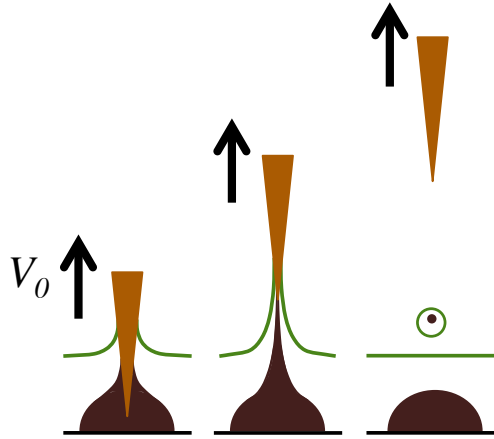


FIGURE 2.4 – **Génération d'une goutte diphasée huile/ferrofluide.** Une pointe est plongée dans une flaque de ferrofluide recouverte par une couche d'huile silicone. En retirant la pointe à une vitesse V_0 de l'ordre de 1m/s il se forme un double pont liquide, qui, en se brisant, encapsule un faible volume de ferrofluide à l'intérieur d'une goutte d'huile silicone. Cette technique est rendue possible par la grande viscosité du ferrofluide ($\nu \approx 1000.10^{-3}$ Pa.s) comparée à celle de l'huile ($\nu = 20.10^{-3}$ Pa.s), et à la faible tension de surface de l'huile qui encapsule spontanément le ferrofluide.

forme une flaque d'environ 5mm de diamètre pour une hauteur de 2mm, de l'ordre de la moitié de la profondeur totale de liquide. Une pointe est alors plongée à travers la bicouche huile/ferrofluide, et retirée à une vitesse V de l'ordre du mètre par seconde. Durant le retrait, il se forme un pont liquide entre la pointe et le bain [20]. Ce pont liquide présente la particularité d'être diphasique : sa partie périphérique est constituée d'huile silicone, tandis qu'un second pont liquide de ferrofluide, encapsulé dans le précédent, prend place en son centre. Lorsque le pont liquide se brise, un segment du filament de ferrofluide généré se retrouve encapsulé à l'intérieur de la goutte. La taille de la goutte ainsi générée dépend faiblement de la vitesse de sortie de la pointe [60, 86]. Ainsi, il est possible, même à la main, de générer des gouttes dont l'incertitude typique sur le diamètre est de l'ordre de quelques pour cent [30].

L'encapsulation de ferrofluide dans cette goutte est quant à elle rendue possible par la grande viscosité relative du ferrofluide par rapport à celle de l'huile silicone, qui permet de former un double pont liquide. La quantité de ferrofluide obtenue est de l'ordre de 5 % du volume total de la goutte.

Le volume V de ferrofluide encapsulé présente cependant une grande variabilité. Des mesures additionnelles seront donc nécessaires pour mesurer la force réelle appliquée sur une goutte contenant un volume variable de ferrofluide. Cette étape a été réalisée à l'aide d'un dispositif de calibration dont les détails sont présentés

dans l'annexe 1. En comparant *a posteriori* les volumes encapsulés par cette méthode pour des centaines de gouttes de taille variables, on observe une variabilité de l'ordre de 50% de la quantité de ferrofluide contenue.

Choix des tailles de goutte

Compte tenu du faible volume relatif de ferrofluide encapsulé, les propriétés de rebonds ne sont pas modifiées par cette ajout de liquide étranger. Les gouttes marcheuses encapsulant du ferrofluide ont toujours un diamètre $D = 600 \pm 50 \mu\text{m}$. Dans cette gamme de valeurs, la vitesse des gouttes va dépendre de leur taille. Parmi les tailles accessibles, toutes les gouttes présentant une dynamique verticale non régulière ont été éliminées. Un critère expérimental simple consiste à les trier par leur vitesse, en excluant les gouttes trop lentes dont le mouvement devient erratique ($V < 6 \text{ mm/s}$, mauvaise synchronisation des rebonds), et les gouttes trop rapides ($V > 12 \text{ mm/s}$) qui peuvent s'arrêter brusquement (bifurcation sous critique du seuil de marche). Dans cette gamme de vitesses, les gouttes observées ont des comportements similaires. Au plus proche du seuil de Faraday, la plage de taille de goutte présentant une bonne synchronisation des rebonds sur la période de Faraday diminue. Un soin particulier a été apporté à ce critère de bonne synchronisation des rebonds, qui peut modifier drastiquement les comportements du marcheur.

En présence de ferrofluide au sein de la goutte, les propriétés de rebonds et de déformation de la goutte ne sont pas modifiées. Une perturbation du régime de marche par le champ magnétique extérieur imposé a tout de même été détecté, due à la force verticale exercée par l'aimant sur la goutte. Cette force verticale diminue la vitesse effective des marcheurs, il est d'autant plus sensible que l'aimant est situé à une distance proche. Un détail de cet effet est disponible à la fin de l'annexe A.

2.3.2 Génération d'un champ magnétique de confinement

La goutte de ferrofluide encapsulée est sensible à un champ magnétique extérieur, mais n'est pas aimantée à champ extérieur nul. Pour exercer une force sur cette goutte, il a été choisi de séparer la génération du champ magnétique en deux sources distinctes. Le dispositif magnétique retenu est illustré sur la figure 2.5.

La première source de champ magnétique est composée de deux bobines placées en position de Helmholtz de part et d'autre de la surface du bain, parcourues par un courant $I_0 = 1 \text{ A}$ qui génèrent un champ magnétique homogène $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ à la surface du bain ($B_0 = 47,6 \text{ G}$.⁹). La goutte encapsulant du ferrofluide acquiert alors

9. Le champ magnétique induit B_0 a été mesuré proportionnel au courant I_0 , ce qui correspond à un nombre de spire $n = \mu_0/S \approx 1000$ par bobine.

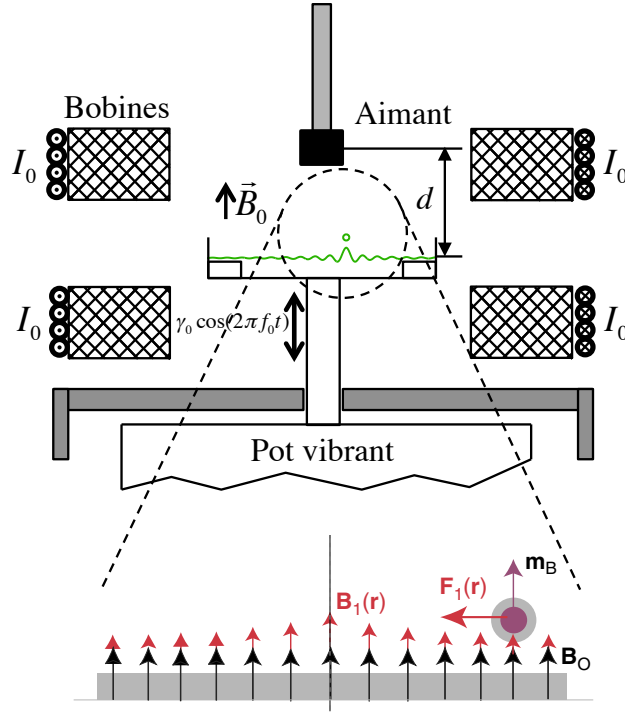


FIGURE 2.5 – **Principe d'application d'une force magnétique.** Une goutte diphasée huile/ferrofluide est plongée dans un champ magnétique vertical homogène $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ généré par deux bobines en position de Helmholtz parcourues par un courant $I_0 = 1A$. Ce champ magnétique confère à la goutte un dipôle magnétique \vec{m} . En présence d'un champ magnétique additionnel variable dans l'espace $\vec{B}_1(r)$ généré par un aimant cylindrique, la goutte de ferrofluide est attirée sous l'aimant dans le cas où $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} > 0$ (force attractive).

un dipôle magnétique constant \vec{m} vertical. Notons que le champ magnétique B_0 étant proportionnel au courant I_0 , il est possible de faire varier ce champ magnétique de polarisation au cours du temps en ajustant le courant parcourant les bobines.

La goutte possède désormais un dipôle magnétique \vec{m} . Un champ magnétique inhomogène $B(d, r)$ d'amplitude relative plus faible ($\approx 20G$) est alors généré par un aimant cylindrique placé sur l'axe de révolution de la cellule. Pour un aimant placé dans le même sens que le champ généré par les bobines, une force attractive est exercée sur la goutte, qui se retrouve piégée sous l'aimant. La force exercée sur la goutte peut être réglée à l'aide de la distance d entre l'aimant et la surface du bain.

Isolation magnétique

L'expérience retenue consistant à utiliser des champs magnétiques pour confiner la goutte, il est nécessaire de s'affranchir des champs magnétiques extérieurs

parasites. La source parasite principale de champ magnétique est le pot vibrant, dont les courants induits génèrent un champ magnétique de l'ordre de 20 Gauss, un champ comparable à celui qui sera utilisé pour confiner un marcheur ($\approx 50\text{G}$). Pour s'affranchir de cette influence, la cellule a été montée sur une colonne en dural de 12 cm de hauteur et 4 cm de diamètre, qui permet d'éloigner la surface du bain du pot vibrant. Une plaque de μ -métal¹⁰ a également été ajoutée entre le pot vibrant et la cellule pour assurer l'isolation magnétique, comme le montre la figure 2.5. Le champ résiduel mesuré à la surface du bain dans ces conditions est de l'ordre de 2 Gauss, une valeur comparable au champ magnétique terrestre ($\approx 0.6\text{G}$), et bien inférieur aux sources de champs magnétiques que nous utiliserons pour confiner la goutte ($\approx 70\text{G}$). Le reste du montage a également été choisi amagnétique, grâce à l'utilisation d'éléments en laiton (vis, support de l'aimant), en dural (cellule) ou en l'aluminium (armature de soutien des bobines) pour la majeure partie du dispositif.

2.3.3 Force magnétique exercée

Une goutte de ferrofluide soumise à un champ magnétique extérieur \vec{B} acquiert un moment dipolaire magnétique \vec{m} . Celle-ci est reliée au champ \vec{H} induit à l'intérieur du ferrofluide par l'expression :

$$\vec{m} = \frac{\chi(H)}{\mu_0} \vec{H} \quad (2.4)$$

où μ_0 désigne la perméabilité magnétique. $\chi(H)$ désigne la susceptibilité magnétique du matériau, qui dépend *a priori* du champ magnétique induit \vec{H} . Pour un ferrofluide dilué, cette susceptibilité est constante à champ faible. Nous utiliserons cette approximation dans le cas des deux ferrofluides utilisés. La relation de passage $\vec{B} = (1 + \chi_0)\vec{H}$ à l'interface du ferrofluide permet de déduire une relation entre \vec{B} et \vec{m} sous la forme :

$$\vec{m} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_0}{\chi_0 + 1} \vec{B} \quad (2.5)$$

La goutte de ferrofluide de moment magnétique \vec{m} induit est alors soumise à une interaction magnétique avec le champ extérieur, dont l'énergie d'interaction par unité de volume e_m de ferrofluide s'écrit :

$$e_m = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (2.6)$$

En utilisant l'équation 2.5, on obtient l'énergie d'interaction E_m totale d'une goutte de ferrofluide de volume V_f plongée dans un champ magnétique :

$$E_m = -\frac{V_f}{2\mu_0} \frac{\chi_0}{\chi_0 + 1} \vec{B}^2 \quad (2.7)$$

10. Le μ -métal est un alliage de Fer-Nickel de grande perméabilité magnétique, qui assure un bon isolement magnétique.

La force associée, en présence d'un gradient de champ magnétique s'écrit alors sous la forme :

$$\vec{F}_{mag} = \vec{\nabla} E_{mag} = \frac{V_f}{\mu_0} \frac{\chi_0}{\chi_0 + 1} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} B \quad (2.8)$$

L'insert de la figure 2.5 illustre la génération de cette force magnétique. En contrôlant la valeur du champ magnétique et de son gradient par les bobines de Helmholtz et l'aimant cylindrique, il est donc possible d'exercer une force contrôlée sur un élément de ferrofluide. Si $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} B > 0$ la force sera attractive, et répulsive dans le cas opposé ($\vec{B} \cdot \vec{\nabla} B < 0$).

2.3.4 Génération d'un potentiel harmonique

Exercer une force magnétique contrôlée sur la goutte passe, entre autre, par une connaissance du champ magnétique généré par l'aimant. Pour cela, le champ magnétique des aimants utilisés a été cartographié à l'aide d'un Gaussmètre¹¹. Cette cartographie a permis de calibrer le champ généré par un aimant cylindrique, calculé par ailleurs à l'aide de formules de magnétisme standard.

Un profil caractéristique de l'énergie magnétique $-B^2$ en fonction de la distance r à l'axe de l'aimant est représenté en figure 2.6a. Au voisinage de l'axe de symétrie, ce profil peut être approximé par une parabole. Le potentiel énergétique imposé au marcheur peut être considéré comme quadratique tant que la distance au centre r est inférieure à 1.5cm, qui correspond à une distance de $3\lambda_F$. Dans ce voisinage, la force de rappel F_{mag} exercée sur une goutte diphasée peut être considérée comme linéaire en la distance au centre r :

$$\vec{F}_{mag} = -k(d, B_0) \vec{r} \quad (2.9)$$

où k désigne la constante de raideur du puits de potentiel magnétique. Cette force est analogue à celle exercée par un ressort sur une masse ponctuelle. Elle dépend de l'intensité du champ magnétique ($\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{B}$), de la susceptibilité χ_0 du ferrofluide utilisé, et du volume V_f de ferrofluide encapsulé. Elle peut être contrôlée à l'aide de la distance d entre l'aimant et la surface du bain ou du courant I_0 parcourant les bobines, qui fixe le champ magnétique constant B_0 imposé.

La constante de raideur k peut être reliée à la courbure a du profil de B^2 au voisinage de 0 par l'expression suivante :

$$k(d, B_0) = \frac{V_f}{\mu_0} \frac{\chi_0}{1 + \chi_0} a(d, B_0) \quad (2.10)$$

11. Plusieurs profils du champ magnétique généré ont été mesurés, selon l'axe de révolution en fonction de la distance à l'aimant, puis selon plusieurs directions radiales à des distances différentes de l'aimant, $z=23.5$. 30.55. 37.6 et 44.65mm, pour les deux composantes B_r et B_z du champ magnétique.

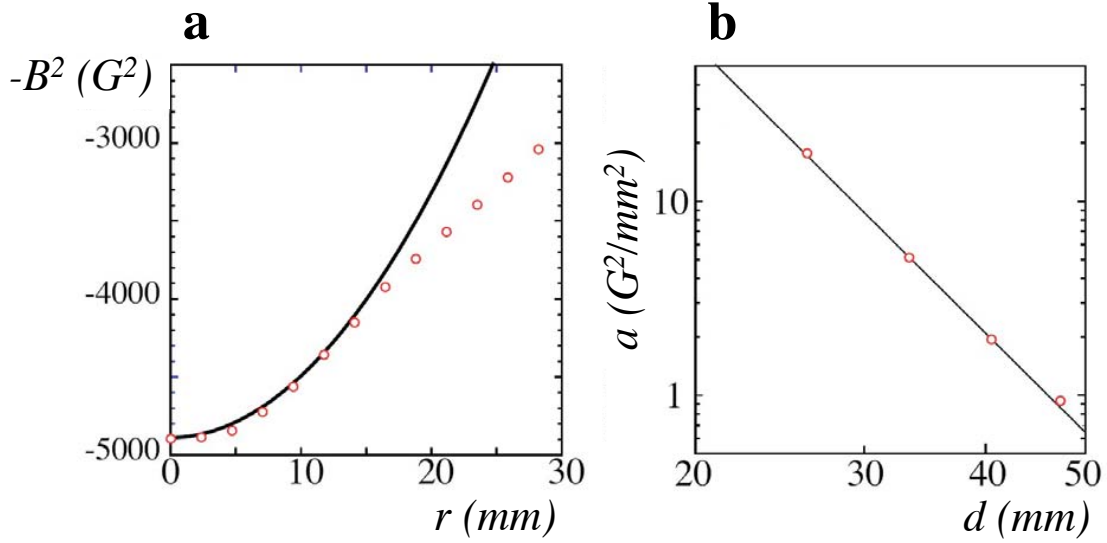


FIGURE 2.6 – **Profil du potentiel magnétique généré.** a) Potentiel magnétique $-B^2$ créée par un aimant cylindrique à une distance $d=40$ mm. Ce potentiel peut être approximé par une parabole $-B^2 = -B(0, d)^2 + ar^2/2$ au voisinage de l'axe de révolution de l'aimant (jusqu'à 15mm, correspondant à un rayon de $3\lambda_F$). Valeur de la courbure a du champ magnétique quadratique B^2 en fonction de la distance à l'aimant en échelle logarithmique. La courbe noire a été calculée par un modèle du champ magnétique généré par un aimant cylindrique (voir annexe A pour détail).

où a peut être considéré comme une constante de raideur magnétique, *i.e* qui ne dépend que du champ magnétique de confinement, et non des propriétés physiques de la goutte (susceptibilité χ_0 et volume V_f de ferrofluide encapsulé). La constante de raideur magnétique a correspond au coefficient du monôme de degré 2 dans le développement en série du profil de B^2 au voisinage de 0 :

$$a(d, B_0) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} (B(d, r) + B_0)^2 \quad (2.11)$$

Cette constante de raideur magnétique a est représentée en figure 2.6b pour quatre distances d à l'aimant différentes. La courbe noire correspond au résultat analytique obtenu par le calcul du champ $B(r, z)$ généré en tout point par un aimant cylindrique. Ce résultat a été obtenu par un calcul analytique du champ généré par un aimant cylindrique de hauteur $h_a = 5$ mm et de diamètre $d_a = 15$ mm. Certains paramètres ont été ajustés pour modéliser au mieux le champ de l'aimant mesuré expérimentalement (voir détail à l'annexe A). La constante de raideur magnétique a peut ainsi être calculée pour chaque expérience à partir des valeurs expérimentales de la distance d à l'aimant et du courant I_0 parcourant les bobines ¹².

12. La formule exacte reliant a à d et I_0 , longue de plusieurs lignes, est donnée en annexe.

Ce dispositif expérimental permet de générer une force harmonique sur une goutte rebondissante, dont l'intensité est réglable grâce à la distance d à l'aimant et l'intensité I_0 du courant parcourant les bobines. Le réglage de la distance d à l'aimant a été utilisé pour étudier le comportement d'un marcheur dans un puits de potentiel harmonique, dont la largeur caractéristique peut être réglée (chapitres 3 à 6). L'utilisation d'un courant variable $I_0(t)$ en fonction du temps permettra également d'effectuer des modulations dans le temps de la force exercée (chapitre 7 et perspectives).

Malgré sa grande flexibilité, cette technique pose un problème de calibration : l'intensité de la force exercée n'est connue qu'à une constante près, le volume de ferrofluide encapsulé. En outre, une différence d'inertie entre une goutte de masse m immobile et la même goutte en régime de marche avait été observé expérimentalement au cours de la thèse d'A. Eddi pour une expérience de Coriolis. Pour ces raisons, il a été choisi de calibrer la force appliquée sur un marcheur par une mesure directe de la force exercée.

2.3.5 Calibration de la force exercée : résumé

Le détail de la méthode de calibration utilisée est présenté en annexe A, ce paragraphe présente seulement un bref résumé de la méthode retenue. Le principe consiste à faire osciller horizontalement au cours du temps la position de l'aimant au dessus de la goutte à une fréquence f_1 . Le mouvement de la goutte sous l'aimant est alors régi par une équation d'un oscillateur du second ordre soumis à une oscillation forcée de fréquence f_1 . Un balayage en fréquence d'oscillation de l'aimant f_1 permet de mesurer la fonction de transfert de la goutte, et d'obtenir la fréquence caractéristique $\omega_0 = \sqrt{k/m_W}$ d'oscillation de la goutte dans le puits, où k est la constante de raideur, et m_W la masse effective du marcheur.

Cette technique permet également de vérifier l'harmonicité du puits de potentiel en changeant l'amplitude d'oscillation de l'aimant, et de vérifier expérimentalement la relation reliant la constante de raideur k aux paramètres expérimentaux de confinement (distance d à l'aimant et courant I_0 parcourant les bobines). D'autres mesures qualitatives, comme le temps de chute de la goutte de ferrofluide après mort du marcheur à travers le bain de liquide d'épaisseur h permet de vérifier ces résultats en ordre de grandeur.

2.4 Deux méthodes de mesure complémentaires

L'étude d'un marcheur, composé d'une goutte et du champ d'onde qui l'entoure, nécessite d'adopter tour à tour un point de vue corpusculaire, centré sur l'étude

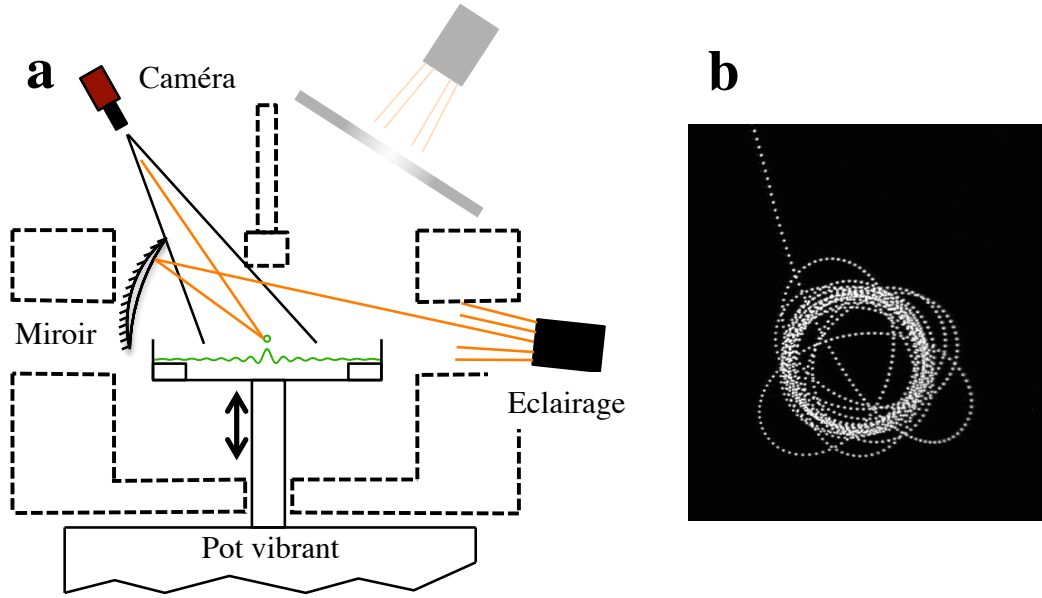


FIGURE 2.7 – **Dispositif de mesure de la position de la goutte.** a) Schéma du dispositif de visualisation et d'éclairage. L'encombrement imposé par le dispositif magnétique est matérialisé par les zones pointillées. La cellule est placée dans une cage carré d'environ 15cm de côté, contenant quelques ouvertures. La caméra est placée en vue du dessus, faisant un angle $\theta \approx 20^\circ$ avec la verticale. Pour obtenir un unique reflet de lumière en direction de la caméra, l'éclairage incident est situé du côté de la visualisation. Un miroir concave a été placé à cet endroit pour réfléchir la lumière provenant d'une lampe située à l'extérieur de la cage. b) Chronophotographie réalisée à partir d'images de la surface du bain. Chaque point blanc correspond à une position de la goutte au cours du temps. Soumise à un champ magnétique, celle-ci se met à orbiter sous l'aimant (voir chapitre 3).

de la trajectoire, ou un point de vue ondulatoire, centré sur le champ d'onde qui l'entoure. Afin d'observer un marcheur, deux dispositifs de mesure ont donc été mis au point. Le premier consiste à détecter la position de la goutte, pour obtenir la trajectoire suivie par la particule. Le second dispositif consiste en une mesure spatialement étendue, pour obtenir l'ensemble du champ d'onde entourant la goutte à tout instant.

2.4.1 Observation de la goutte et mesure de sa trajectoire

Visualisation et éclairage

Le schéma du dispositif de visualisation de la goutte est présenté en figure 2.7a. Compte tenu de l'encombrement imposé par le dispositif magnétique, délimité par les zones en pointillé sur le schéma, la caméra n'a pu être placée à la verticale de la cellule. La visualisation s'effectue donc avec un angle θ , de l'ordre de 20° par

rapport à l'axe vertical. Afin d'obtenir un unique reflet de la goutte dans la direction d'observation, les rayons lumineux incidents sont redirigés par un miroir légèrement concave, depuis un faisceau de lampe à DEL (Diodes Electro-Luminescentes) situé à l'extérieur du dispositif magnétique.

Afin d'étudier la dynamique horizontale, la fréquence d'acquisition des images est choisie à un sous multiple de la fréquence de vibration du bain, à 20 Hz. Ainsi, la position de la goutte est toujours repérée à la même phase du rebond. Une chronophotographie réalisée à partir d'images expérimentales est présentée en figure 2.7b. Chaque point blanc correspond à la position de la goutte à un instant donné.

Détection automatique de la position de la goutte

Pour suivre le mouvement de la goutte au cours du temps, un algorithme de détection de la position de la goutte sur l'image en temps réel avait été mis au point par Julien Moukhtar. Chaque image enregistrée est convoluée par un disque circulaire de diamètre comparable à la tache lumineuse faite par le reflet de la goutte. La position du maximum d'amplitude du produit de la convolution correspond alors à la position de la goutte. La simplicité de cette technique permet de traiter les images plus rapidement qu'elles ne sont enregistrées. Ainsi, il est possible d'afficher, en temps réel la trajectoire suivie par la goutte. Ce système a permis d'explorer rapidement l'espace des phases, en ajustant directement après visualisation de la trajectoire les paramètres expérimentaux. Grâce à ce gain de temps précieux, des expériences longues ont pu être effectuées, en venant se placer directement aux valeurs pertinentes des paramètres expérimentaux.

Post-traitements

Pour corriger la perspective induite par la position de la caméra, l'image est ensuite dilatée d'un facteur $\cos(\theta)$ selon la direction d'inclinaison de la caméra, où $\theta = 20^\circ$ est l'angle d'orientation de la caméra par rapport à la verticale. Parmi les outils de mesures développés, on peut signaler les mesures de vitesse, de direction de propagation, et de courbure de la trajectoire.

La vitesse instantanée a été obtenue par différence pondérée des cinq positions voisines de la goutte. La technique retenue est un schéma d'ordre 3 standard de calcul discrétisé d'une différentielle en faisant intervenir les positions X_{k-2} , X_{k-1} , X_k , X_{k+1} et X_{k+2} pour calculer la vitesse en k . Cette méthode utilisée en simulations numériques permet de lisser les mesures de vitesse, tout en restant suffisamment locale pour observer des variations temporelles rapides. La courbure locale a été mesurée en interpolant la trajectoire par un cercle au voisinage du point d'observation. Enfin, la direction de propagation est déduite des mesures de vitesse, et permet par

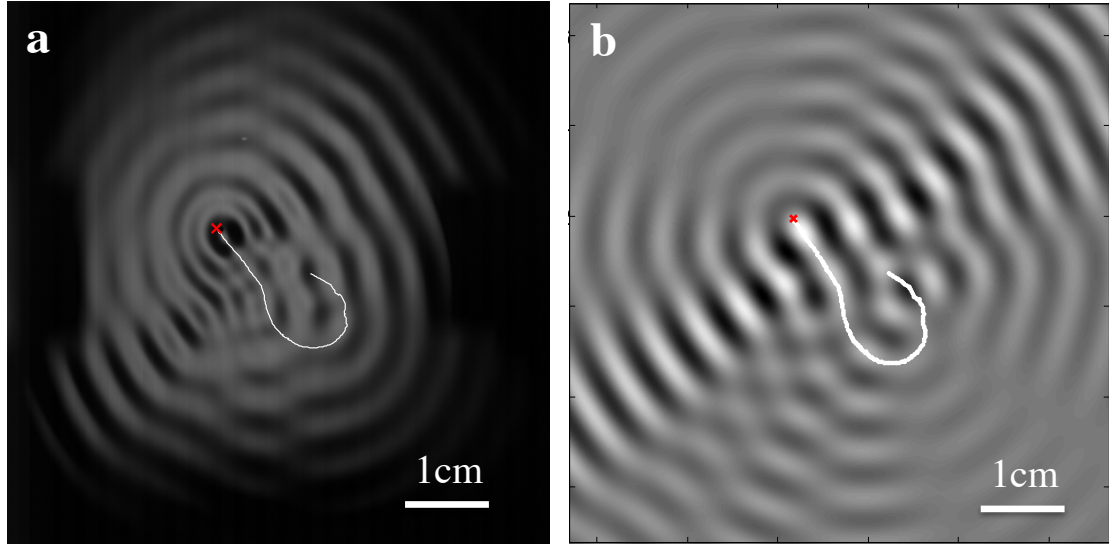


FIGURE 2.8 – **Reconstitution numérique d'un champ d'onde.** a) Photographie de champ d'onde issu d'une trajectoire complexe, pour une mémoire $Me = 80$. La trajectoire suivie par le marcheur durant deux temps de mémoire (160 rebonds, soit 4 secondes) a été superposée en trait blanc. b) Reconstitution du champ d'onde à partir de la trajectoire suivie par le marcheur en prenant le même paramètre de mémoire $Me = 80$, et en sommant des fonctions de Bessel centrées sur les points d'impact successifs de la goutte correspondant aux 160 derniers rebonds.

exemple de projeter les forces appliquées sur la goutte selon la direction tangente ou normale à la trajectoire.

Reconstitution du champ d'onde à partir d'une trajectoire expérimentale

Pour analyser l'évolution des trajectoires, il a parfois été nécessaire de connaître le champ d'onde associé à la trajectoire. Pour cela, il est possible de tirer partie des travaux précédents effectués sur la mesure du champ d'onde d'un marcheur [32].

Pour cela, on utilisera la formule du champ h généré donné au chapitre 1 (équation 1.5) :

$$h(\vec{\rho}, t) = h_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_F ||\vec{\rho} - \vec{r}_n||) e^{-n/M} \quad (2.12)$$

où les \vec{r}_n correspondent aux positions successives des impacts de la goutte sur le bain de liquide. Ce champ d'onde peut donc être calculé à partir de la trajectoire mesurée du marcheur.

La figure 2.8b présente un champ d'onde reconstitué à l'aide de la formule 2.12, généré par la trajectoire en trait blanc. Pour valider cette méthode, et obtenir une mesure qualitative du champ d'onde, une technique de mesure directe du champ a

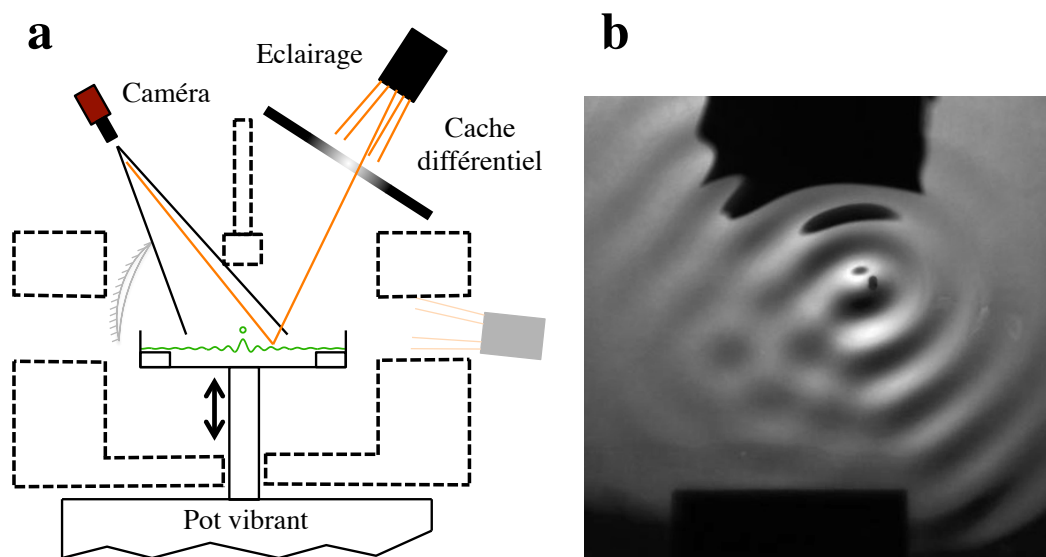


FIGURE 2.9 – **Dispositif de visualisation du champ d'onde.** a) Schéma du dispositif. L'éclairage est placé au symétrique de la caméra par rapport à l'axe vertical de symétrie de la cellule, derrière un cache dont l'opacité croît avec la distance au centre. Une surface liquide plane apparaît lumineuse, tandis que les zones inclinées renvoient moins de lumière dans la direction d'observation. Cette technique permet de visualiser l'amplitude des pentes de l'interface, et donc la structure spatiale du champ d'onde. b) Photographie d'une goutte confinée par un champ magnétique et du champ d'onde qui l'entoure.

été mise au point. La figure 2.8a présente une image d'un tel champ d'onde, qui permet de valider la technique de reconstitution utilisée.

2.4.2 Visualisation directe du champ d'onde

Le champ d'onde entourant un marcheur peut être mesuré à partir de techniques de reconstitution d'interface [32], développée par F. Moisy et M. Rabaud au FAST [61]. Cette technique repose sur la déformation d'un motif aléatoire, situé sous l'interface, en fonction de la pente locale de la surface. Pour le dispositif magnétique, l'utilisation d'un aimant placé à la verticale de la cellule empêche la visualisation directe de la surface selon l'axe perpendiculaire. Ce type de technique de reconstitution de la position de l'interface s'avère ici difficile à mettre en oeuvre pour un angle d'incidence non nul. Une autre technique de visualisation a donc été préférée.

La méthode de visualisation des ondes retenue consiste à éclairer la cellule par une source lumineuse dont l'intensité dépend de la direction des rayons incidents, comme le montre la figure 2.9. La caméra placée au point image de la source lumineuse par rapport à l'interface liquide reçoit donc un maximum de lumière lorsque l'interface

est plane. Dès que l'interface est déformée, l'intensité de la lumière reçue par le capteur diminue. En effet, les rayons proviennent alors d'une zone plus sombre du cache, laissant passer moins de lumière. Il en résulte une visualisation en niveau de gris de la pente locale de l'interface. Le cache différentiel a été fabriqué par impression d'un dégradé circulaire en niveau de gris sur une feuille de papier calque.

Cette mesure donne une information précise sur la structure spatiale du champ entourant le marcheur. De plus, en cas de coalescence ou de sortie du champ de vision de la goutte, le champ laissé s'amortit dans le temps. Une simple mesure de l'évolution du contraste au cours du temps fournit une mesure directe du paramètre de mémoire, comme nous l'avons vu au début de ce chapitre.

2.5 Conclusion

Le dispositif expérimental présenté permet donc d'obtenir une goutte rebondissant sur un bain de liquide vibré, au voisinage de l'instabilité de Faraday. Le temps d'amortissement des ondes générées par la goutte à chaque impact est contrôlé expérimentalement par la distance relative au seuil de Faraday.

L'utilisation de gouttes d'huile silicone encapsulant un faible volume de ferrofluide permet de plus d'obtenir des marcheurs présentant des propriétés similaires aux gouttes homogènes, tout en étant sensibles à un champ magnétique extérieur.

Le dispositif magnétique retenu, composé de bobines en position de Helmholtz et d'un aimant cylindrique permet de plonger un marcheur dans un puits de potentiel magnétique, dont la raideur est réglable via la distance entre l'aimant et la surface du liquide, ou par une modulation du champ statique généré par les bobines.

Afin de visualiser le mouvement du marcheur, deux systèmes de mesure ont été mis en place, l'un pour suivre le mouvement de la goutte, l'autre pour mesurer le champ d'onde associé. Il est temps d'explorer la dynamique de ce *marcheur confiné*.

Chapitre 3

Marcheur amnésique

Ce chapitre est consacré au cas où le temps d'amortissement des ondes est bref, de l'ordre de quelques périodes du mouvement vertical. Même confiné par le champ magnétique, le marcheur n'est alors jamais amené à revisiter une région de l'espace perturbée par les ondes précédemment émises. Il s'agit donc d'étudier la dynamique d'un marcheur amnésique, i.e. qui ne se souvient pas des endroits qu'il a précédemment visités.

La mémoire de chemin est ainsi réduite à son plus simple appareil, une force tangente à la trajectoire qui ne dépend pas de la trajectoire suivie. On parlera de force de propulsion appliquée sur la goutte par les ondes qu'elle génère. L'étude du marcheur amnésique permettra de définir dans une situation simple les propriétés d'un marcheur qui découlent de l'existence de cette force propulsive. Nous verrons en quoi cette propulsion distingue le marcheur d'un système conservatif, où l'énergie est conservée au cours du temps.

3.1 Marcheur amnésique en force centrale

On définit un marcheur *amnésique* par sa capacité à oublier le chemin qu'il vient d'emprunter. Il s'agit d'une limite basse mémoire où la force exercée par les ondes sur la goutte peut toujours être considérée comme tangente à la trajectoire, et où la force exercée par les ondes ne dépend plus de la trajectoire suivie. Pour vérifier ces deux critères, il est utile d'introduire une longueur de persistance S_{Me} définie par :

$$S_{Me} = V_0 \tau \quad (3.1)$$

où V_0 représente la vitesse libre du marcheur, τ le temps d'amortissement des ondes stationnaires de Faraday. Cette longueur de persistance S_{Me} définit donc la taille caractéristique du chemin le long duquel des sources actives d'onde sont encore présentes. La limite de force tangente à la trajectoire sera atteinte lorsque le rayon

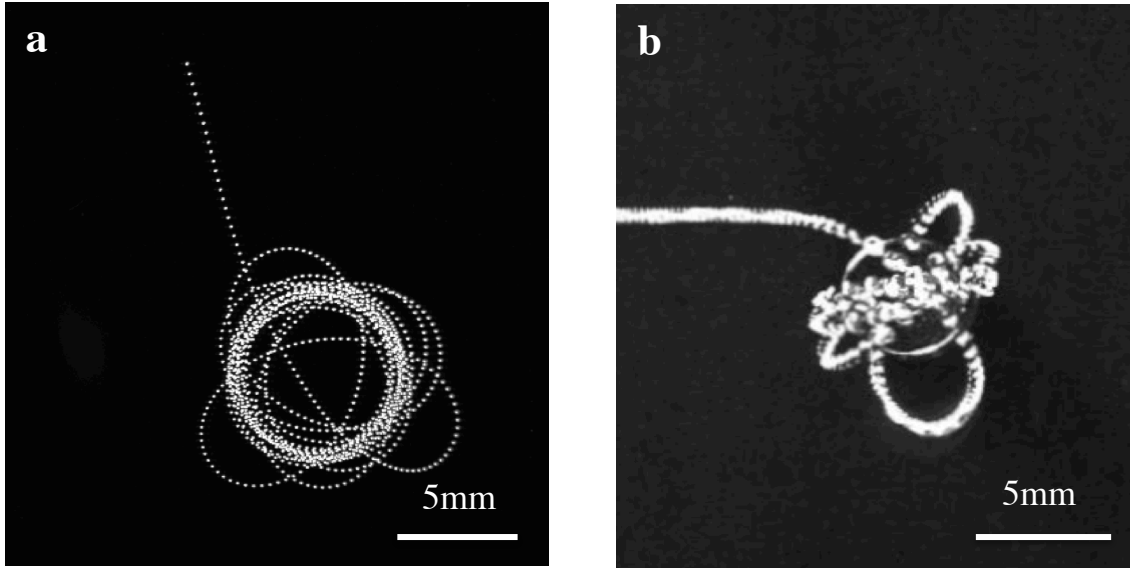


FIGURE 3.1 – **Chronophotographie comparée d'un mobile ponctuel dans un puits de potentiel.** a) Mouvement d'un marcheur piégé par un champ de force central : après quelques aller-retour sous l'aimant, la trajectoire converge rapidement vers une orbite circulaire. b) Goutte d'oxygène liquide en lévitation par effet Leidenfrost, soumise à une force magnétique attractive *d'après* les travaux de Keyvan Piroird [70]. Le mouvement est lentement amorti, la goutte finissant par faire des aller retour sous l'aimant. Ces deux chronophotographies illustrent bien la différence de comportement entre un mouvement faiblement entretenu, et un mouvement faiblement dissipatif.

de courbure R_c de la trajectoire sera plus grand que cette longueur de persistance, *i.e.* l'ensemble des sources actives sur le bain peuvent être considérées comme alignées derrière la goutte : $S_{Me} < R_c$. On se place également dans le régime où les termes d'interférences entre sources sont négligeables, *i.e.* lorsque la longueur de persistance est inférieure à la longueur d'onde de Faraday ($S_{Me} \ll \lambda_F$). Ces deux conditions définissent une borne supérieure du régime dit de basse mémoire autour de $Me \approx 15$.

Par ailleurs, le temps τ d'amortissement des ondes doit être supérieur à quelques périodes de Faraday pour que la goutte se déplace à la surface du bain ($\tau > 3T_F$). Les deux bornes définissent donc finalement une plage de paramètre de mémoire $Me = \tau/T_F$ correspondant au marcheur *amnésique* :

$$3 < Me < 15 \quad (3.2)$$

Dans cette limite, l'effet de la mémoire de chemin n'est cependant pas inexistante mais réduite à son plus simple appareil : propulser la goutte.

3.1.1 Capture et confinement d'un marcheur amnésique

Capture

Un marcheur amnésique est lâché depuis un coin de la cellule. Attiré par le champ magnétique de l'aimant, il se retrouve piégé dans le puits de potentiel. La figure 3.1a présente une chronophotographie d'un marcheur lors de sa capture par le champ de l'aimant, pour un intervalle de temps de 2 rebonds par image. Après quelques oscillations, la trajectoire converge rapidement vers une orbite circulaire centrée sur l'axe de symétrie de l'aimant. L'expérience peut être répétée plusieurs fois, le marcheur convergera toujours vers cette même orbite, dans un sens de rotation ou l'autre quelle que soit la condition initiale, pour une constante de raideur k du puits de potentiel donnée. Ce type de phénomène est déjà la signature d'un processus dissipatif : plusieurs conditions initiales peuvent converger vers le même état final.

La convergence vers un unique état final peut être comparée au cas d'un mobile peu dissipatif mais non auto-propulsé, piégé par une force extérieure. Une telle situation peut être obtenue en tirant partie de l'effet Leidenfrost [55]. Placée sur une plaque dont la température est bien supérieure à celle du point d'ébullition du liquide, une goutte lévite sur son propre film de vapeur, qui supporte le poids de la goutte par force de lubrification [7]. Isolé thermiquement par son film de vapeur, une goutte millimétrique a une durée de vie qui atteint plusieurs minutes. En utilisant de l'oxygène liquide, paramagnétique par nature, K. Piroird a mis en évidence qu'une goutte en lévitation par effet Leidenfrost peut être capturée par le champ magnétique d'un aimant [71]. La figure 3.1b *d'après* [70] présente une trajectoire expérimentale d'une telle goutte d'oxygène liquide, piégée par une force extérieure. Des oscillations sont également observées, mais la trajectoire finit par converger vers une position fixe, située à la verticale du centre de l'aimant.

La différence fondamentale entre ces deux cas de figure est mise en exergue par leur comportement transitoire respectif. Dans le cas de la goutte d'oxygène liquide, les oscillations initiales tendent vers des mouvements de va et vient rectilignes lentement amortis sous l'aimant. Dans le cas d'un marcheur, au contraire, les oscillations initiales tendent vers une trajectoire circulaire, où le mouvement selon les deux axes principaux est de même nature, mais en quadrature de phase.

Pour un marcheur amnésique, l'orbite circulaire finale ne dépend plus de la condition initiale. On retrouve en fait une propriété des systèmes dissipatifs, qui est une contraction de l'espace des phases au cours du temps. Pour une force de confinement donnée, il n'existe donc que deux solutions d'équilibre, deux trajectoires circulaires de même rayon mais de sens de parcours opposés. Pour observer différentes tailles d'orbite, la raideur du puits de potentiel magnétique devra donc nécessairement être modifiée.

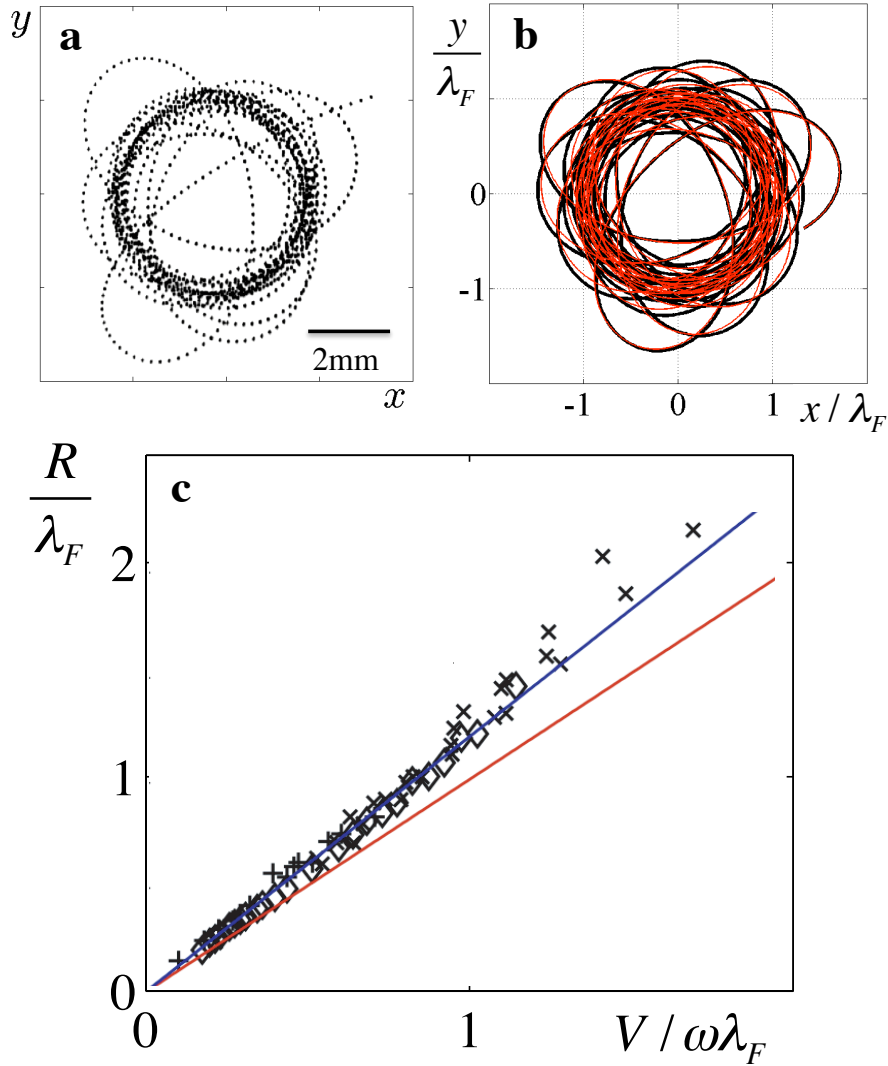


FIGURE 3.2 – **Convergence vers une orbite circulaire.** a) Chronophotographie du régime transitoire suivi par un marcheur piégé dans le potentiel harmonique. b) Simulation numérique d'un modèle de friction de type Rayleigh donnée par l'équation 3.12 (rouge), et d'une simulation directe de la dynamique d'un marcheur par le modèle discret de E. Fort (noir) [41]. *Simulations réalisées par M. Labousse [53].* Les deux approches reproduisent bien le type de transitoire observé expérimentalement. c) Rayon \bar{R} de l'orbite circulaire obtenue en fonction du confinement imposé *i.e.* du paramètre $\Lambda = V/(\omega\lambda_F)$. Points expérimentaux (+, ×, losanges) obtenus pour trois gouttes de vitesse $V = 8, 9$ et 12 mm/s, préalablement calibrées par la méthode présentée en annexe A, et courbe théorique (rouge) sans aucun paramètre ajustable. La courbe bleue tient compte d'une correction de l'inertie additionnelle du marcheur par rapport à une simple goutte rebondissante, qui induit un coefficient directeur de 1.2 ($R = 1.2\Lambda$) (voir détail à l'annexe B ou [12]).

Confinement

Pour une particule hamiltonienne dans un potentiel harmonique, la taille de l'orbite suivie peut être modifiée en changeant la condition initiale, qui détermine l'énergie mécanique totale du système, et donc l'énergie cinétique moyenne. Dans le cas d'un marcheur, il n'est pas possible de modifier cette énergie cinétique, puisque celle-ci est déjà déterminée par un équilibre entre propulsion et dissipation. Pour explorer différentes tailles d'orbite, il est donc nécessaire de changer la constante de raideur k du puits de potentiel, qui détermine la pulsation ω imposée à la goutte. La figure 3.2 présente le rayon des cercles obtenus en fonction du confinement relatif imposé à la goutte, *i.e.* en fonction de $V/\omega\lambda_F$. Cette courbe peut être obtenue analytiquement en équilibrant la force centrifuge subie par un marcheur en rotation à vitesse constante V avec la force centrale imposée par le champ magnétique. Il vient donc :

$$m_W \frac{V^2}{R_c} = kr \quad (3.3)$$

où R_c correspond au rayon de courbure instantané et r à la distance au centre de symétrie du puits de potentiel. Dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R constant, le rayon de courbure est égal à la distance au centre ($R_c = R$). La valeur de la pulsation $\omega = \sqrt{k/m}$ a été mesurée par la méthode de calibration (cf Annexe A), avec m la masse de la goutte au repos. Le rayon R de l'orbite s'exprime donc sous la forme :

$$R = \frac{V}{\omega} \sqrt{\frac{m_W}{m}} \quad (3.4)$$

La proportionnalité entre R et V/ω est bien vérifiée expérimentalement comme le montre la figure 3.2. En supposant que $m = m_W$, on obtient la courbe rouge de la figure 3.2, sans paramètre ajustable. Il existe donc un préfacteur de 1.2. entre la courbe théorique et la courbe mesurée expérimentalement, valeur bien supérieure à la précision de la méthode de calibration de la force exercée sur une goutte rebondissante. Ce décalage correspond en fait à une différence d'inertie entre une simple goutte rebondissante et un marcheur¹.

Une analyse fine de la force exercée par les ondes sur la goutte, dans une limite de faible mémoire, permet de montrer que la masse m_W d'un marcheur est en fait supérieure à celle d'une simple goutte rebondissante, due à l'action du champ d'onde sur la goutte [12]. Un calcul de cette force additionnelle est présenté en annexe B.

1. Cet effet avait également été observé dans le cas d'un marcheur soumis à une force de Coriolis, avec un écart de $1.4 \approx 1.2^2$ [41], mais n'avait pu être élucidé en raison d'une double cause possible. D'une part le rebond de la goutte peut laisser supposer qu'une force extérieure n'influence le mouvement que dans la phase de vol libre, ou d'autre part provenir d'une différence de masse entre la goutte et le marcheur dans son ensemble. Dans les deux cas, l'effet attendu est une augmentation de l'inertie effective du marcheur.

Cette masse additionnelle d'origine ondulatoire est un premier effet de mémoire, où la force exercée par les ondes sur la goutte ne dépend pas uniquement de la position de la vitesse de celle-ci, mais également de son *accélération*. Le résultat est une augmentation effective de l'inertie de la goutte. Pour des mémoires plus élevées, il est possible de voir apparaître des dérivées d'ordre supérieur de la position, mettant en évidence que le mouvement d'un marcheur ne peut pas être réduit simplement à celui d'un mobile ponctuel.

Au final, l'excellent accord entre théorie et expérience nous permet de définir un paramètre de confinement noté Λ par :

$$\Lambda = \frac{V}{\lambda_F \omega_r} \quad (3.5)$$

où ω_r correspond à la pulsation caractéristique effectivement mesurée sur un marcheur confiné, et vaut en pratique $1.2\omega_0$. Le paramètre Λ est donc un nombre sans dimension faisant intervenir le rapport entre la taille caractéristique du confinement ω_r/V et la longueur d'onde λ_F des ondes de Faraday. En utilisant cette nouvelle valeur ω_r de la pulsation réelle imposée au marcheur, un paramètre de confinement Λ égal à 1 correspond à une orbite de rayon égale à une longueur d'onde λ_F , pour un marcheur amnésique. L'adimensionnement par la longueur d'onde de Faraday n'est pas utile dans le cadre du marcheur amnésique, mais il permettra de conserver la même définition de Λ pour les cas de plus haute mémoire où λ_F joue un rôle de longueur caractéristique. Λ désigne le paramètre de confinement, qui sera utilisé abondamment tout au long de cette thèse.

Notons qu'une fois le parallèle fait entre l'étalonnage sous le seuil de marche qui donne la valeur de ω_0 et la relation linéaire entre le rayon de l'orbite R et le paramètre de confinement Λ , il n'est plus nécessaire d'effectuer tout le processus d'étalonnage pour chaque goutte. Seuls deux trajectoires circulaires obtenues dans le régime de marcheur amnésique pour des valeurs différentes de Λ sont suffisantes pour déterminer le préfacteur entre la force réellement exercée sur la goutte et le champ magnétique imposé. Cette dernière méthode présente en outre l'avantage d'étalonner la force directement sur un marcheur, ce qui évite au maximum l'apparition de biais expérimentaux systématiques, et l'écart d'inertie de 20 % entre goutte rebondissante et marcheur.

L'observation de tels mouvements circulaires est une conséquence d'un mécanisme d'entretien via l'oscillation verticale du bain. Dans le processus, le caractère isolé du système est perdu, au profit d'un mouvement périodique *entretenu*. Le prix à payer est une perte de diversité des trajectoires observées : Là où, pour un système hamiltonien, il existe un grand nombre de trajectoires d'équilibre dans un puits de potentiel harmonique (cercles, ellipses, mouvement rectiligne passant par le centre), un marcheur amnésique n'exhibe finalement que des mouvements circulaires. Pour

comprendre le phénomène sous-jacent qui sélectionne uniquement ces trajectoires circulaires, on se propose d'étudier le comportement du marcheur amnésique au cours du régime transitoire.

3.1.2 Comportements transitoires d'un marcheur amnésique

Les effets d'entretien et de dissipation du mouvement se révèlent lors des régimes transitoires, lorsque le marcheur tend vers son orbite d'équilibre. Pour étudier cette caractéristique, on se propose d'effectuer des mesures expérimentales additionnelles sur le régime de transitoire de convergence vers une orbite circulaire.

Adaptation du dispositif expérimental

Pour étudier le régime transitoire de convergence vers une orbite circulaire, un changement abrupt de la force exercée est généré, forçant ainsi un transitoire entre deux trajectoires circulaires de rayons différents.

En pratique, une telle situation peut être obtenue à partir d'une trajectoire circulaire stable en modifiant brutalement le courant parcourant les bobines d'une valeur I_1 à une valeur I_2 . Pour cela, un générateur basse fréquence et un amplificateur de signaux continus et alternatifs sont utilisés pour générer un signal carré pour le courant parcourant les bobines. Les deux valeurs du courant $I_1 = 1A$ et $I_2 = 0.2A$ sont donc alternées avec une période de 20s, un temps bien supérieur à la période de l'orbite. Cette variation de courant induit un changement du champ magnétique homogène B_0 . Le temps de coupure t_L du champ magnétique après coupure du courant s'effectue sur un temps caractéristique $t_L = L_B/R$ où R est la résistance des bobines, et L_B leur inductance. On a $R = 8,6\Omega$ pour les bobines utilisées et $L_B = SB_0/I_0 \approx 3 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^{-4} \approx 3 \times 10^{-5}$. On trouve donc $t_L \approx 10^{-6}$ s, un temps négligeable à l'échelle considérée (1/40 s pour le mouvement vertical). Cette variation du courant dans les bobines induit donc une variation de la force exercée, et force une transition entre deux orbites circulaires.

Résultats

La conséquence d'un signal carré pour le courant parcourant les bobines est un changement abrupt de la pulsation caractéristique du puits de potentiel confinant le marcheur d'une valeur ω_1 à ω_2 .

Une goutte placée dans le champ de l'aimant suit alors des régimes transitoires répétés, pour atteindre la nouvelle taille d'orbite circulaire d'équilibre. Des signaux expérimentaux typiques de ces transitions sont présentés en figure 3.3. La figure 3.3a présente le rayon R de l'orbite suivie en fonction du temps. Le trait plein rouge

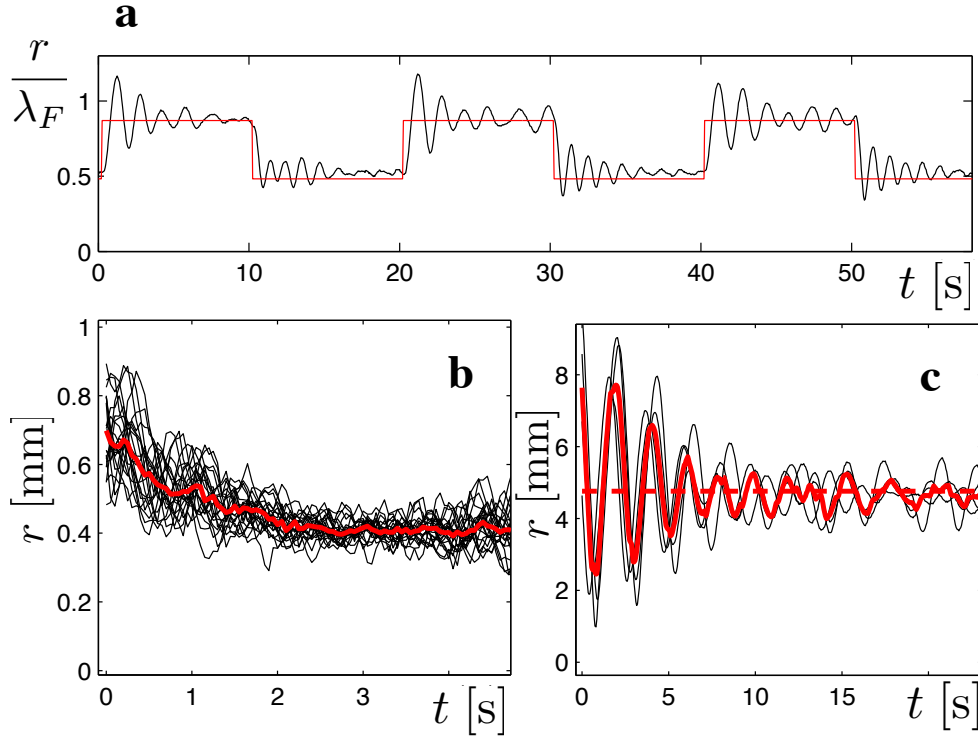


FIGURE 3.3 – **Caractérisation expérimentale des comportements transitoires d’un marcheur amnésique.** (a) La force magnétique est modifiée périodiquement, provoquant des régimes transitoires répétés. La courbe rouge correspond à la valeur attendue du rayon, la courbe noire à la distance au centre $r(t)$ de la trajectoire suivie. (b) Superposition de 10 régimes transitoires pour un rayon final $R = 0.4$ mm (courbe noire) (c) Superposition de 10 régimes transitoires pour un rayon final $R = 4.8$ mm (courbes noires). Les lignes rouges correspondent à des moyennes d’ensemble sur les 10 réalisations. Dans les deux cas, une convergence vers l’état final est observé mais la nature du régime transitoire dépend fortement du rayon final de l’orbite observée.

correspond à la valeur théorique attendue, qui saute toutes les 10s d’une valeur de $R_1 = 0.85\lambda_F$ à $R_2 = 0.5\lambda_F$. Après chaque changement brutal du courant, le marcheur suit un régime transitoire, et converge vers la nouvelle trajectoire circulaire d’équilibre. Cette transition est répétée 10 fois pour en déduire des courbes moyennes de transition.

Le type de transitoire observé dépend fortement de la taille finale de l’orbite. Les figures 3.3b et 3.3c présentent deux exemples de régimes transitoires, obtenus pour des valeurs du confinement $\Lambda = 0.1$ et $\Lambda = 1$ différentes, permettant d’obtenir une orbite de taille réduite ($R \approx 0.1\lambda_F$), et une orbite de taille comparable à la longueur d’onde de Faraday ($R \approx 1\lambda_F$). Dans le premier cas, le rayon décroît lentement vers la valeur finale attendue. Dans le cas d’une transition vers une plus large orbite, le

rayon augmente d'abord rapidement pour ensuite osciller autour de la valeur finale. Ce type de transitoire peut alors être assimilé à des oscillations amorties autour de l'état final. Ce comportement peut être observé autant par valeur inférieure, que par valeur supérieure : il ne dépend que de l'état final du rayon de l'orbite.

Ce type de transitoire rappelle le comportement d'un oscillateur du second ordre dont le facteur de qualité dépendrait de la période $T_R = 2\pi/\omega_r$ de l'orbite finale. Pour une orbite de grande taille, le facteur de qualité est bien supérieur à 1 ($Q \approx 10$ pour la figure 3.3c), pour les petites orbites, le facteur de qualité devient beaucoup plus faible ($Q \approx 0.4$ pour la figure 3.3b).

L'existence d'une transition entre deux régimes de convergence en fonction de la période de l'orbite signifie que le seul paramètre adimensionné, le confinement Λ , ne suffit pas à décrire le comportement d'un marcheur amnésique. Il existe nécessairement un autre temps caractéristique dans ce système, à comparer avec la période de l'orbite finale observée.

Un mécanisme, différent du simple confinement par le champ magnétique, doit donc déterminer les comportements des transitoires observés, et joue donc un rôle important dans la dynamique d'un marcheur amnésique. S'étant placé dans la limite de faible mémoire ($\tau < \lambda_F/V$, $\tau < R_c/V$), ce temps caractéristique inconnu ne devrait pas être relié au temps de mémoire τ . D'où peut donc provenir ce temps caractéristique supplémentaire ?

3.2 Un temps caractéristique de la dynamique

L'existence d'une convergence vers des orbites circulaires, par des transitoires qui dépende d'un temps caractéristique inconnu, demande une compréhension de la dynamique d'un marcheur même lorsque la mémoire est réduite à son strict minimum. Pour cela, on se propose de revenir à la description de ce qui définit un marcheur amnésique : la propulsion par les ondes. Après une brève présentation des modèles de marche préexistant, nous dégagerons alors une forme standard permettant de décrire la propulsion. Ce modèle pourra ensuite être appliqué au cas d'un marcheur amnésique confiné, pour identifier l'origine de ce temps inconnu. Pour conclure, on soulignera les similitudes et différences entre la dynamique d'un marcheur amnésique et le mouvement d'une particule libre en l'absence de dissipation.

3.2.1 Mécanisme de propulsion d'une goutte : état de l'art

Le phénomène de mise en marche d'une goutte est observé au delà d'une accélération seuil d'oscillation du bain $\gamma_W \approx 3.5g$ pour laquelle une goutte se mettait spontanément en mouvement. Les mesures de vitesse en fonction de l'accélération γ

du bain ont mis en évidence une bifurcation supercritique (ou bifurcation fourche) pour la vitesse du marcheur.

Pour décrire cette bifurcation, un premier modèle empirique avait alors été imaginé par Arezki Boudaoud [74]. Il a ainsi introduit une force exercée par les ondes sur la goutte qui dépendrait non pas de la position de la particule, mais de sa vitesse instantanée. L'expression suivante de la force ondulatoire F_{ondes} avait alors été suggérée :

$$F_{ondes} = F_0 \sin \left(2\pi \frac{V}{V_\phi} \right) \quad (3.6)$$

où F_0 correspond à une amplitude de la force exercée, qui croît avec l'amplitude d'excitation, et V_ϕ à la vitesse de phase des ondes de surface. Une force de dissipation effective, de type friction visqueuse en $-\eta V$ avait également été introduite pour décrire l'énergie perdue par la goutte à chaque interaction avec le bain. En cherchant les solutions stationnaires d'une telle équation, on trouve que pour $F_0 < \eta V_\phi / 2\pi$ la solution nulle est stable. Pour $F_0 > \eta V_\phi / 2\pi$, la solution nulle devient instable, et il apparaît une nouvelle vitesse d'équilibre, non nulle, dont la norme croît comme la racine de l'écart relatif au seuil $F_0 - F_{0c}$.

Cette équation décrit donc bien le phénomène de bifurcation de la vitesse, pour une valeur seuil de l'amplitude des ondes $F_c = \eta V_\phi / 2\pi$. Cette approche n'explique cependant pas comment l'amplitude des ondes F_0 peut croître, et pourquoi la vitesse de phase des ondes de Faraday intervient dans l'expression.

Après la découverte de la mémoire de chemin [32], des modèles d'interaction entre goutte et ondes plus réalistes ont été développés. Le premier, à dynamique discrète, a été imaginé par E. Fort pour implémenter des simulations numériques reproduisant le comportement d'un marcheur dans plusieurs expériences [15, 41]. Le second est dû à A. Oza, J. Molacek et J. Bush, qui, reprenant le modèle d'E. Fort, sont passés à la limite de rebonds continus [65]. Une description plus détaillée de cette bifurcation de marche a alors été élaborée, basée sur un modèle hydrodynamique de déformation de la goutte ou du bain à l'impact [64].

3.2.2 Modèle de Rayleigh

Toutes ces approches ne se sont cependant pas attardées sur un point : quelles peuvent être les conséquences sur la dynamique d'un marcheur d'une force qui dépendrait de la vitesse ? La première est que toutes ces expressions confèrent au marcheur un caractère non conservatif. Le système, dans ce type de description, devient dissipatif par nature, c'est à dire en échange permanent d'énergie avec son environnement.

Pour comprendre ce qu'implique l'ajout d'une force non conservative sur la dy-

namique, et son lien éventuel avec les comportements observés expérimentalement, on se propose de décrire le terme de friction et la force due aux ondes par une seule et même force phénoménologique, appelée force de propulsion \vec{F}_p . L'objectif étant d'établir une expression la plus simple possible pour la force de propulsion \vec{F}_p , qui contient néanmoins les ingrédients physiques minimaux et respecte les symétries du problème.

Dans le régime de basse mémoire, la force de propulsion \vec{F}_p est tangente à la trajectoire et donc colinéaire avec la vitesse \vec{V} du marcheur *i.e* $\vec{F}_p = \eta_p(V)\vec{V}$, où η_p est homogène à un coefficient de friction. Pour $\eta_p(V) > 0$ le mouvement sera accéléré, tandis que pour $\eta_p(V) < 0$, le mouvement sera ralenti. Pour qu'il existe une vitesse d'équilibre, non nulle, il faut donc nécessairement que η_p dépende de la vitesse V du marcheur. Enfin, par définition, la vitesse d'équilibre V_0 du marcheur doit être un zéro de η_p :

$$\eta_p(V_0) = 0 \quad (3.7)$$

Par invariance par rotation, le coefficient η_p ne doit dépendre que de $\|\vec{V}\|$. Enfin, un changement $V \rightarrow -V$ ne devrait pas changer le signe de F_p . En excluant la valeur absolue de V qui peut introduire des singularités pour η_p , la force doit être une fonction paire de V . L'expression la plus simple pour η_p satisfaisant ces conditions s'écrit :

$$\eta_p = \eta_0 \left(1 - \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 \right) \quad (3.8)$$

où η_0 est un coefficient de friction effectif, différent du terme de friction η . V_0 est la vitesse libre du marcheur, qui vérifie $\eta_p(V_0) = 0$. La force de propulsion s'écrit donc finalement :

$$\vec{F}_p = \eta_0 \left(1 - \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 \right) \vec{V} \quad (3.9)$$

Cette force de friction est un développement à l'ordre non linéaire le plus bas d'une force dépendante de la vitesse. Dans le cas présent, elle est issue d'un équilibre entre la dissipation à l'impact et la propulsion par les ondes.

Une telle expression est appelée friction de Rayleigh, du nom de Lord Rayleigh, qui l'a introduite au XIX^{ème} siècle pour décrire la propagation du son dans un milieu matériel [76]. Elle a été reprise depuis pour l'étude de particules browniennes auto-propulsées [34]. La friction de Rayleigh permet bien de rendre compte de l'existence d'une *vitesse d'équilibre* en introduisant une forme de force de rappel qui tend à ramener le mobile vers sa vitesse naturelle. En effet, si la vitesse instantanée est plus grande que la vitesse d'équilibre V_0 le mouvement sera amorti. Au contraire pour $V < V_0$, le mouvement sera accéléré.

L'équation du mouvement de la dynamique d'un marcheur de masse m_W soumis

à une telle force de propulsion peut alors s'écrire sous la forme :

$$m_W \dot{\vec{V}} = \eta_0 \left(1 - \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 \right) \vec{V} \quad (3.10)$$

En divisant cette équation par la masse m_W du marcheur, il apparaît naturellement un temps caractéristique de la dynamique, même en l'absence de force extérieure :

$$T_V = \frac{\eta_0}{m_W} \quad (3.11)$$

Ce temps caractéristique apparaît pour un marcheur libre, il est donc intrinsèque à la dynamique d'un marcheur. Si l'on imagine une perturbation de la vitesse libre, le temps de retour à la vitesse initiale sera dicté par ce temps caractéristique T_V .

En ajoutant la force extérieure imposée par le champ magnétique, on obtient finalement une équation de la dynamique pour le marcheur, typique du mouvement d'un mobile autopropulsé dans un puits de potentiel harmonique :

$$\ddot{\vec{R}} = -\omega_r^2 \vec{R} - \frac{1}{T_V} \vec{V} \left(\left(\frac{V}{V_0} \right)^2 - 1 \right) \quad (3.12)$$

A une dimension d'espace, cette équation est formellement analogue à un oscillateur de Van der Pol pour la vitesse². Pour s'en convaincre, il suffit de dériver l'équation 3.12 par rapport au temps. Il vient :

$$m_W \ddot{V}_x = -\omega_r^2 V_x - \eta_0 \left(3 \left(\frac{V_x}{V_0} \right)^2 - 1 \right) \dot{V}_x \quad (3.13)$$

Cette équation fût introduite par Van Der Pol pour expliquer la régularité des battements cardiaques [22], et a depuis été largement étudiée comme exemple de système dynamique dissipatif exhibant un cycle limite non nul [21]. Une de ses principales propriétés est que, compte tenu de la nature dissipative du système, toutes les trajectoires convergent vers un seul et unique attracteur, où la position oscille au cours du temps avec une amplitude donnée. En dépit des similitudes entre l'équation de Van der Pol et le modèle de Rayleigh, le cas à deux dimensions n'est pas équivalent.

L'oscillateur de Rayleigh à deux dimensions d'espace ne présente alors pas de solution analytique connue, en raison du terme de friction qui introduit un couplage entre les deux directions d'espace. En effet, le coefficient de friction η_p fait intervenir la norme de la vitesse, dépendante à la fois de \dot{x} et de \dot{y} .

Notons par ailleurs que l'équation du mouvement ainsi obtenue (3.12) fait bien apparaître deux temps caractéristiques, l'un associé au champ magnétique, $T_R =$

2. Remerciement à Yves Pomeau pour cette suggestion lors d'une école d'été à Peyresq, qui permet de mettre en évidence le parallèle entre ces deux types d'oscillateurs entretenus.

$2\pi/\omega_r$ et l'autre intrinsèque au marcheur, le temps de retour T_V à la vitesse d'équilibre. Le rapport T_R/T_V devrait donc influencer la dynamique d'un marcheur confiné. Peut-on comparer ce modèle aux mesures de régimes transitoires précédemment introduites ? Est-il alors possible de mesurer une valeur du temps caractéristique T_V de cette dynamique ?

3.2.3 Mesure expérimentale du temps de convergence

Afin de tester le modèle, il est possible de comparer les temps caractéristiques des transitoires observés aux prédictions du modèle de Rayleigh. Pour $\omega_r T_V > 1$, le régime transitoire présente des oscillations autour du rayon d'équilibre. Le temps caractéristique T_c de convergence est alors mesuré à partir de la décroissance de l'enveloppe des oscillations. Pour $\omega_r T_V < 1$, le régime transitoire est suramorti. Le temps de convergence T_c est alors mesuré à partir d'un ajustement par une fonction exponentielle du rayon en fonction du temps.

L'ensemble des mesures de l'inverse du temps de convergence T_R/T_c ont été représentées en figure 3.4, en fonction de la période du mouvement $T_R = 2\pi R/V_0$ du marcheur autour du centre. Notons que l'axe des ordonnées correspond à l'inverse du temps de convergence, de sorte qu'un maximum de la courbe correspond à un minimum du temps de convergence. Le minimum du temps de transitoire est donc atteint au voisinage de $1/\omega_m = 0.24$ s. Pour des valeurs inférieures comme supérieures, le temps de convergence est augmenté. Ces valeurs peuvent être comparées au résultat prédit par le modèle de Rayleigh (ligne pointillée). Celle-ci a été obtenue en simulant les régimes transitoires de l'équation de Rayleigh en faisant varier le temps caractéristique T_V de convergence vers la vitesse d'équilibre. Comme le régime transitoire dépend uniquement du produit ωT_V , ces données peuvent être comparées directement avec l'expérience. Il reste tout de même un paramètre ajustable, la valeur de ce temps de convergence T_V . On trouve $T_V = 0.14$ s, une valeur en accord avec les mesures effectuées par Molacek *et al.* sur des gouttes rebondissantes simples [63]. Un très bon accord entre expérience et modèle de Rayleigh est ainsi obtenu, montrant que l'introduction d'un temps de convergence vers la vitesse d'équilibre est l'ingrédient physique essentiel.

Ces observations mettent en évidence que selon la direction tangente au mouvement, il existe une force de rappel qui ramène le marcheur à sa vitesse d'équilibre V_0 . Ce fait a d'importantes conséquences sur la dynamique d'un marcheur. Soumis à une perturbation extérieure, il y aura en effet deux régimes possibles de retour à la vitesse d'équilibre.

Pour une perturbation lente devant le temps de convergence T_V , la vitesse du marcheur sera peu modifiée. On peut donc considérer que la vitesse V reste égale à

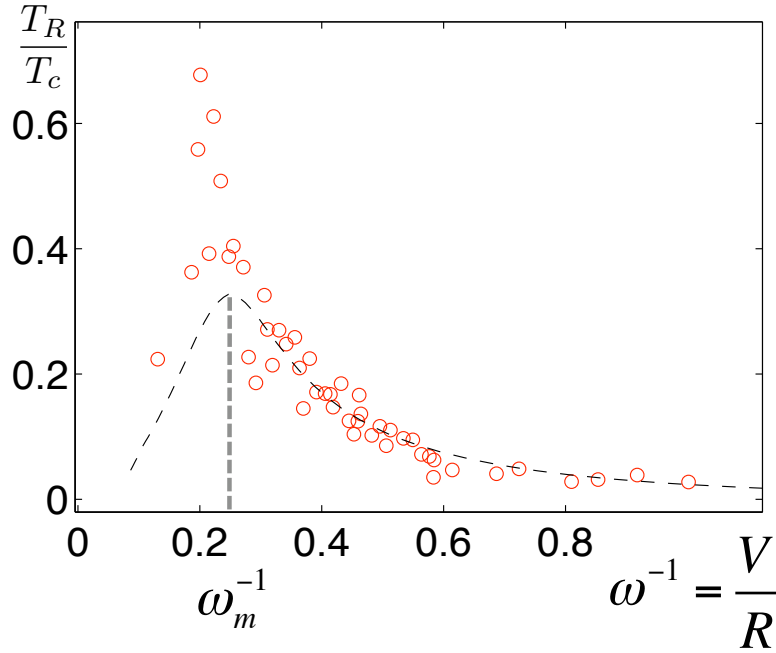


FIGURE 3.4 – **Temps de convergence vers une orbite circulaire.** Inverse de la durée du transitoire T_c de convergence vers une orbite circulaire en fonction de l'inverse de la pulsation $\omega^{-1} = V_0/R$. Le temps de transitoire est minimum pour une valeur de $\omega_m^{-1} = 0.24$ s. Le temps de convergence est minimal pour $T \approx T_m$. $T < T_m$ correspond à un régime suramorti, tandis que $T > T_m$ correspond à un régime d'oscillations amorties.

$V_0 : V \approx V_0$. En revanche, la direction du mouvement sera affectée. Pour le cas des orbites circulaire cela correspond à l'observation de lentes oscillations de la distance au centre.

Pour une perturbation rapide devant le temps de convergence T_V , la vitesse du marcheur est modifiée. Dans ce cas, l'inertie du marcheur devient négligeable par rapport à la force de Rayleigh, et le système est régi par un équilibre entre variation de la vitesse et force appliquée. Le régime de convergence suramorti est observé dans ce cas de figure.

3.2.4 Une conséquence : la convergence inévitable vers l'orbite circulaire

De manière analogue à l'oscillateur de Van der Pol, l'oscillateur de Rayleigh est donc un exemple de système dissipatif/entretenu, où plusieurs conditions initiales convergent vers le même état final. Dans le cas de l'oscillateur de Rayleigh à deux dimensions, cette convergence n'avait toutefois, à ma connaissance, pas été étudiée. Une analyse théorique plus complète effectuée par M. Labousse est disponible dans un article publié récemment [54], ou dans sa thèse en cours d'écriture [53].

Pour étudier cette convergence, deux approches complémentaires ont été utilisées. La première consiste à suivre l'évolution de l'énergie mécanique totale de la goutte, et de montrer que la trajectoire circulaire est le seul minimum local d'énergie. Toute trajectoire tendra donc à converger vers cet attracteur.

La seconde approche consiste à étudier la réponse à une perturbation linéaire en développant la solution au voisinage du point d'équilibre. Cette technique ne permet pas de déduire une stabilité globale, mais donne en revanche des informations supplémentaires sur la nature des régimes transitoires suivis.

On se contentera ici de présenter l'approche qualitative basée sur le bilan énergétique global.

Bilan énergétique global

Comme nous l'avons vu précédemment, les régimes transitoires d'un marcheur en force centrale peuvent présenter à la fois des oscillations de la position ou de la vitesse. Contrairement à une particule conservative, ces deux oscillations ne sont pas nécessairement d'amplitude comparable. On peut tout de même remarquer que le temps de convergence minimal est atteint lorsque l'amplitude d'oscillation de l'énergie potentielle est égale à celle des oscillations de l'énergie cinétique. Il s'agit alors du temps caractéristique critique, pour lequel le régime de convergence est suramorti.

Une approche énergétique permet de visualiser le phénomène. Pour cela, on définit l'énergie mécanique $E = v^2/2 + \omega_r^2 r^2/2$ par unité de masse de la goutte. En multipliant l'équation 3.12 par la vitesse instantanée V du marcheur, on obtient l'évolution de l'énergie mécanique E sous la forme :

$$\dot{E} = \frac{1}{T_v \omega_r} V^2 \left(1 - \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 \right) \quad (3.14)$$

Cette expression met en évidence qu'il n'existe que deux positions d'équilibre, correspondant à $V = 0$ et $V = V_0$. Le point fixe en $V = 0$ est répulsif, et le seul attracteur stable du système correspond à $V = V_0$. La trajectoire associée est une orbite circulaire, de rayon $R = V/\omega_r$. Cet équilibre correspond à une équipartition de l'énergie mécanique entre énergie cinétique et énergie potentielle, analogue à celle d'un système hamiltonien³.

3. Dès que l'on s'éloigne du point fixe, *i.e.* que la vitesse se met à fluctuer, l'équipartition n'est en revanche pas nécessairement vérifiée.

3.3 Conclusion

L'étude d'un marcheur amnésique confiné a mis en évidence un comportement bien différent d'une particule conservative. Si cette différence avait été précédemment mentionnée, elle n'aurait pas fait l'objet d'une étude détaillée.

Pour toute la suite, il est donc bon de se rappeler que le marcheur n'est pas une particule conservative, mais un système hors équilibre dont l'énergie moyenne est fixée, et peut fluctuer dans le temps autour de sa valeur moyenne. Ce type de propriété n'est pas spécifique à un marcheur. Celle-ci découle en fait du modèle de Rayleigh, qui peut être appliqué à un grand nombre de systèmes autopropulsés, tant que la vitesse ne fluctue pas trop autour de sa valeur d'équilibre.

La structure non conservative a une autre conséquence : la convergence vers un attracteur, les deux orbites circulaires, quelles que soient les conditions initiales. Il y a donc là un des ingrédients pouvant mener à l'apparition de phénomènes de quantification macroscopique : plusieurs conditions initiales peuvent converger vers le même état final. D'autres ingrédients sont tout de même manquants à ce stade pour parler de quantification. La convergence ou non vers des attracteurs plus globaux dépendra de la nature du profil d'énergie et de la manière dont le système converge ou non vers ces minima.

Les études précédentes, en particulier celle d'un marcheur soumis à une force de Coriolis [41], n'ont pas eu à invoquer cette nature dissipative. Pourquoi cela est-ce nécessaire ici ? Cela dépend en fait de la direction d'intérêt. L'échange d'énergie entre goutte et bain provoque des variations de vitesse, *i.e.* une modification de la dynamique dans la direction tangente au mouvement. Selon cette direction, il s'agit bien d'un système autopropulsé, et ce fait ne peut être oublié.

En revanche, selon la direction orthogonale au mouvement, ni la force de friction ni la propulsion n'interviennent. Selon cette direction, la variation de la quantité de mouvement est bien égale à la somme des forces extérieures appliquées. Dans le cas de Coriolis, seul le bilan de quantité de mouvement selon cette direction orthogonale au mouvement avait été utilisé. Parmi les forces pouvant intervenir, on peut citer la projection de la force centrale, voire la composante transverse de la force exercée par les ondes sur la goutte.

A la lumière de ces premiers résultats, les comportements des marcheurs peuvent être divisés en deux catégories.

La première concerne les variations de vitesse liées à une perturbation extérieure dirigée selon la direction tangente à la trajectoire. La propulsion, comme d'autres termes d'ordre supérieur du champ d'onde, auront tendance à ramener le marcheur vers sa vitesse d'équilibre. Les fluctuations de vitesse peuvent alors être liées à la structure du champ d'onde environnant, comme dans les expériences de marcheur

en cavité [44], mais les effets dissipatifs ne seront jamais négligeables.

La seconde concerne les changements de direction induits par une perturbation de la trajectoire selon la direction transverse au mouvement. Les forces extérieures jouent alors uniquement sur la direction du mouvement, et non la vitesse. C'est le cas de l'expérience d'un marcheur en force de Coriolis, où la mise en rotation du bain soumet la goutte à une force toujours transverse à la trajectoire [41]. Dans ce cas, la vitesse du marcheur est constante, et les aspects dissipatifs peuvent être ignorés, seul le bilan selon la direction transverse au mouvement sera pertinent.

Le confinement par une force centrale peut présenter les deux types de comportements. La perturbation du mouvement peut en effet être dirigée aussi bien selon la direction tangente que la direction transverse, suivant la trajectoire suivie par le marcheur. L'apparition de trajectoires variées nous amènera plutôt à suivre le second point de vue, c'est à dire une particule se déplaçant à vitesse constante, dont la direction de propagation est modifiée par la force extérieure (force centrale), ou interne au marcheur (action du champ d'onde sur la goutte).

Chapitre 4

Confinement et mémoire de chemin

I : Etats propres

L'objectif de cette partie est d'étudier l'influence de la *mémoire de chemin* sur un marcheur confiné. Lorsque le temps d'amortissement des ondes devient comparable à la période de l'orbite imposée par la force centrale, le marcheur va revisiter des zones où les ondes préalablement émises n'ont pas encore été dissipées. Un couplage entre la goutte et sa propre trajectoire s'opère alors par l'intermédiaire du champ d'onde : la goutte devient sensible à son propre passé. Cet effet peut être mesuré par le paramètre de mémoire M_e , mesure du nombre de sources d'ondes de Faraday considérées comme encore actives à la surface du bain.

Dans le cas de trajectoires confinées, les effets de mémoire vont en fait dépendre de la longueur du chemin de sources S_{Me} encore actives, dont on rappelle la définition :

$$S_{Me} = V_0 \tau \quad (4.1)$$

où V_0 désigne la vitesse libre du marcheur, et τ le temps d'amortissement des ondes de Faraday. S_{Me} désigne donc une forme de *longueur de persistance* d'un marcheur. Cette longueur caractéristique est alors à comparer avec le périmètre de l'orbite suivie. Par exemple pour une orbite circulaire, le rayon R de la trajectoire était donnée par $\Lambda = R$, où Λ est le paramètre de confinement. Il a été défini par $\Lambda = V/(\omega \lambda_F)$ au chapitre 3, à partir de mesures du rayon des orbites observées en fonction de la pulsation propre ω du puits imposé. La limite de haute mémoire correspondra alors à $S_{Me} \approx 2\pi \Lambda \lambda_F$.

L'expérience présente revient donc à augmenter cette longueur de persistance au delà du périmètre des orbites, pour étudier l'influence de son propre chemin sur la trajectoire de la goutte. Le couplage avec sa propre histoire étant médié par les ondes de Faraday, la longueur d'onde de Faraday λ_F joue le rôle de taille caractéristique. On se propose donc d'explorer les différents états possibles du marcheur confiné

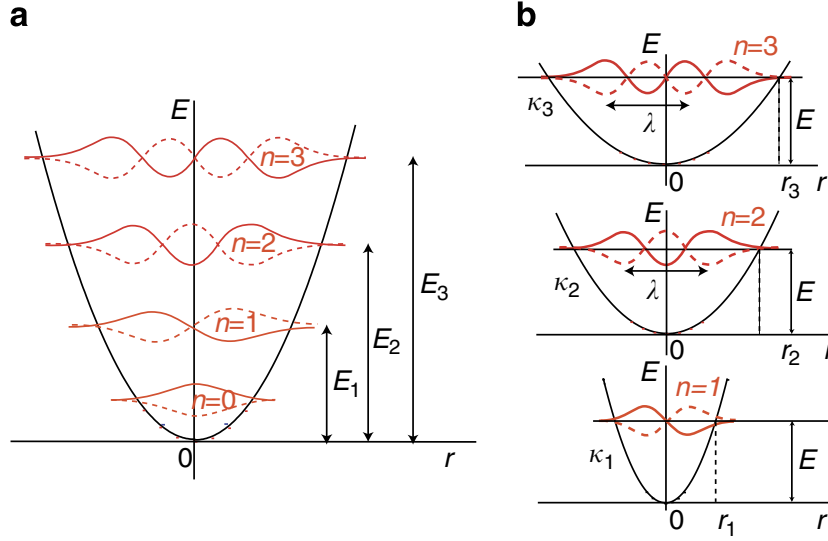


FIGURE 4.1 – **Confinement d’une entité duale onde-particule dans un puits de potentiel harmonique.** a) Dans le cas quantique, il correspond différents niveaux discrets d’énergie pour un puits de potentiel donné. Seules les transitions entre niveaux qui absorbent ou libère un photon d’énergie $E_n - E_m$ sont accessibles à la mesure. b) Pour un marcheur, le couplage entre la goutte et l’onde fixe l’énergie cinétique moyenne de la particule. Si expérience analogue il y a, elle consiste à faire varier la largeur du puits de potentiel, à énergie cinétique fixée. Le paramètre pertinent est alors le paramètre de confinement sans dimension Λ , rapport entre largeur caractéristique V/ω de la trajectoire suivie et longueur d’onde de Faraday λ_F . Si des phénomènes de quantification existe, des orbites particulières devraient apparaître pour des valeurs spécifiques de constante de raideur, correspondant aux niveaux d’énergie de l’oscillateur harmonique.

dans un puits de potentiel, en faisant varier l’extension Λ des orbites attendues par rapport à la longueur d’onde de Faraday λ_F , pour une longueur de persistance plus grande que la taille caractéristique des orbites.

Cette expérience rappelle ainsi le cas d’une particule quantique piégée dans un puits de potentiel harmonique. Pour un système quantique *cohérent*, il apparaît une quantification des niveaux d’énergie E_n indexés par un entier n , comme schématisé en figure 4.1a. Cette quantification est observée expérimentalement via les transitions entre niveaux qui absorbent ou libèrent des quanta d’énergie sous forme de photons. Les énergies de chaque niveau sont alors déduites par mesure des écarts $E_n - E_{n'}$ entre deux niveaux d’énergie n et n' pour un puits de potentiel à une dimension [14]. A deux dimensions, le principe reste le même, mais une seconde observable est nécessaire pour décrire la quantification. L’introduction d’un nombre m de quantification du moment cinétique L permet dans le cas quantique de rationaliser les états possibles en fonction des deux entiers naturels n et m .

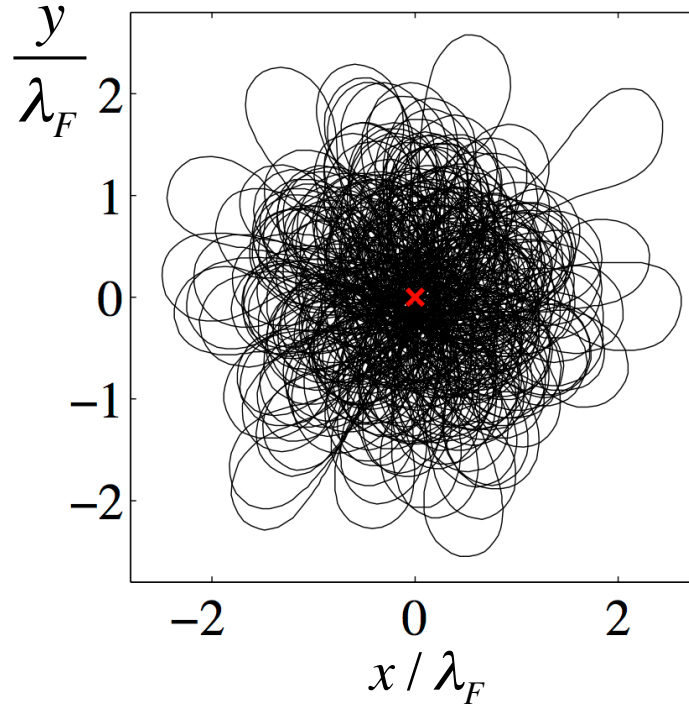


FIGURE 4.2 – **Trajectoire désordonnée en régime de haute mémoire.** correspond à $Me=25$ et $\Lambda = 0.58$ pour une vitesse $V = 7.7$ mm/s du marcheur. La trajectoire est loin des orbites circulaires, stables, observées dans le régime basse mémoire. Les boucles individuelles brisent la symétrie centrale à temps court. En revanche, leur répartition autour du centre rétablit une forme de symétrie à temps long.

Le marcheur, objet dual onde-particule, possède bien des différences avec un tel système. En particulier, l'énergie cinétique moyenne d'un marcheur est fixée par l'entretien du mouvement via les ondes. Il n'est donc pas possible d'explorer les différents niveaux d'énergie possibles en changeant l'énergie de la particule. Pour pallier cette limitation, il est en revanche possible d'explorer différentes extensions spatiales des trajectoires du même marcheur, dans un puits de potentiel de raideur variable. Une telle expérience est schématisée sur la figure 4.1b. En réglant la constante de raideur du puits k , l'extension spatiale de la trajectoire suivie sera modifiée en conséquence. Ainsi, les éventuels niveaux d'énergie peuvent être explorés en réglant l'extension spatiale V/ω par rapport à la longueur d'onde de Faraday λ_F , *i.e.* en modifiant la valeur du paramètre Λ . Peut-on alors observer une forme de quantification des tailles d'orbites? L'objet de cette partie est de présenter les résultats du confinement d'un marcheur dans un puits de potentiel harmonique à deux dimensions.

4.1 Trajectoires d'un marcheur confiné

A partir d'une orbite circulaire d'un marcheur amnésique ($Me \approx 10$), le paramètre de mémoire est augmenté vers une valeur plus élevée, typiquement de l'ordre de 100. Le type de trajectoire observé dépend alors fortement de la valeur du confinement Λ déterminée par la raideur du puits de potentiel. La section qui suit présente un aperçu des différents régimes observés en fonction du confinement Λ imposé.

4.1.1 Premières observations

Si aucune attention particulière n'est portée sur le choix du confinement Λ , la trajectoire généralement observée est un ensemble de boucles à l'apparence désordonnée, comme celles présentées sur la figure 4.2. L'image d'une trajectoire circulaire simple laisse donc place à plus haute mémoire à des motifs complexes. A temps court, l'invariance par rotation est perdue, bien que la symétrie centrale subsiste à temps très long. La trajectoire prend la forme d'une succession de boucles dont le sens de rotation par rapport au centre évolue au cours du temps. Le moment cinétique L instantané de la goutte défini par :

$$L = \vec{r} \times m\vec{V} \quad (4.2)$$

n'est donc pas conservé, bien qu'il s'agisse d'un problème à force centrale. Cette variation du moment cinétique au cours du temps et la perte partielle de symétrie circulaire mettent en évidence l'influence d'une force non centrale qui influe sur la dynamique du marcheur. En outre, la complexité au moins apparente des trajectoires observées montre que cette force additionnelle peut induire un désordre spatio-temporel. Est-il néanmoins possible d'isoler des orbites stables ?

4.1.2 Quantification des orbites circulaires

Pour rechercher des orbites stables, on se propose de revenir à des trajectoires circulaires obtenues à mémoire faible ($Me \approx 10$), puis d'augmenter au fur et à mesure le paramètre de mémoire. L'expérience peut ensuite être renouvelée dans une large gamme de confinements $0.2 < \Lambda < 2$, correspondant à des orbites circulaires de rayon $0.2 < R/\lambda_F < 2$. L'ensemble des trajectoires circulaires ainsi obtenues est représenté sur la figure 4.3 en fonction du paramètre de mémoire Me et de leur rayon $\bar{R} = R/\lambda_F$ adimensionné par la longueur d'onde de Faraday λ_F .

On peut voir qu'à faible mémoire, toutes les tailles d'orbites peuvent être observées pour différentes valeurs de Λ . Au fur et à mesure que la mémoire est augmentée, il apparaît des zones interdites, pour lesquelles aucune orbite circulaire n'est observée. Il subsiste tout de même des orbites circulaires, même à mémoire

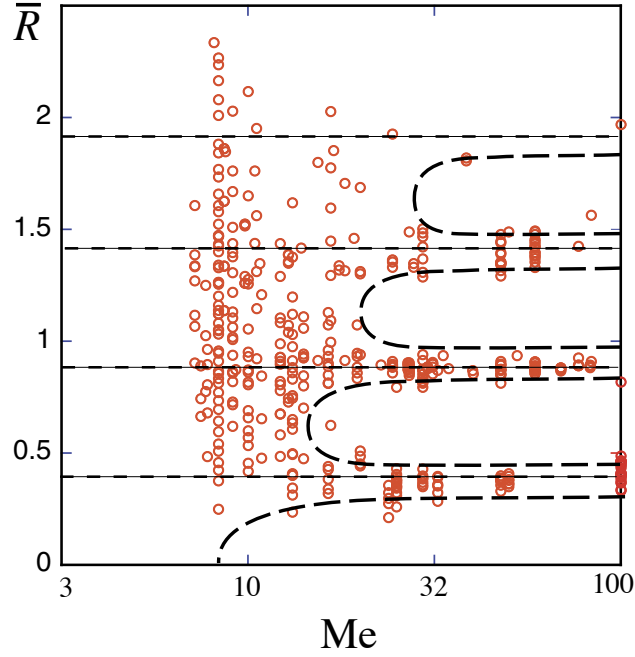


FIGURE 4.3 – **Quantification des orbites circulaires.** Les trajectoires circulaires uniquement ont été représentées en fonction du paramètre de mémoire Me et du rayon $\bar{R} = R/\lambda_F$ observé. Ces orbites ont été obtenues par augmentation du paramètre de mémoire à partir d'une orbite circulaire stable. Ensuite, il est possible de varier le confinement Λ pour explorer la stabilité d'orbites circulaires de différentes tailles. Le modèle théorique prédit que seule les valeurs $\bar{R}=0.37, 0.87, 1.37, 1.87$ (traits pointillés) sont observées dans la limite de mémoire infinie.

élevé ($Me \approx 100$), mais seulement au voisinage de valeurs discrètes du rayon, $R = 0.37, 0.87, 1.37, \dots$. On peut remarquer que la valeur critique d'apparition des zones interdites augmente d'ailleurs avec le rayon des orbites. Cette croissance correspond approximativement à la limite $S_{Me} \approx R$ où la longueur de persistance devient comparable au rayon de l'orbite suivie. On observe une *quantification* des orbites circulaires vers des valeurs discrètes du rayon.

4.1.3 De nouvelles trajectoires stables

Les zones dites interdites, ou aucune trajectoire circulaire n'est observée, correspondent à des plages successives de valeurs de Λ , $0.5 < \Lambda < 0.7$ et $1, 1 < \Lambda < 1.3$. Dans ces gammes de valeurs, la plupart des trajectoires deviennent désordonnées, du type de la figure 4.2. Toutefois, apparaissent dans des domaines étroits de valeur de Λ de nouvelles trajectoires stables présentant d'autres symétries. La figure 4.4 présente les différentes trajectoires stables observées expérimentalement pour différentes valeurs de la largeur du puits de potentiel Λ , et des paramètres de mémoire

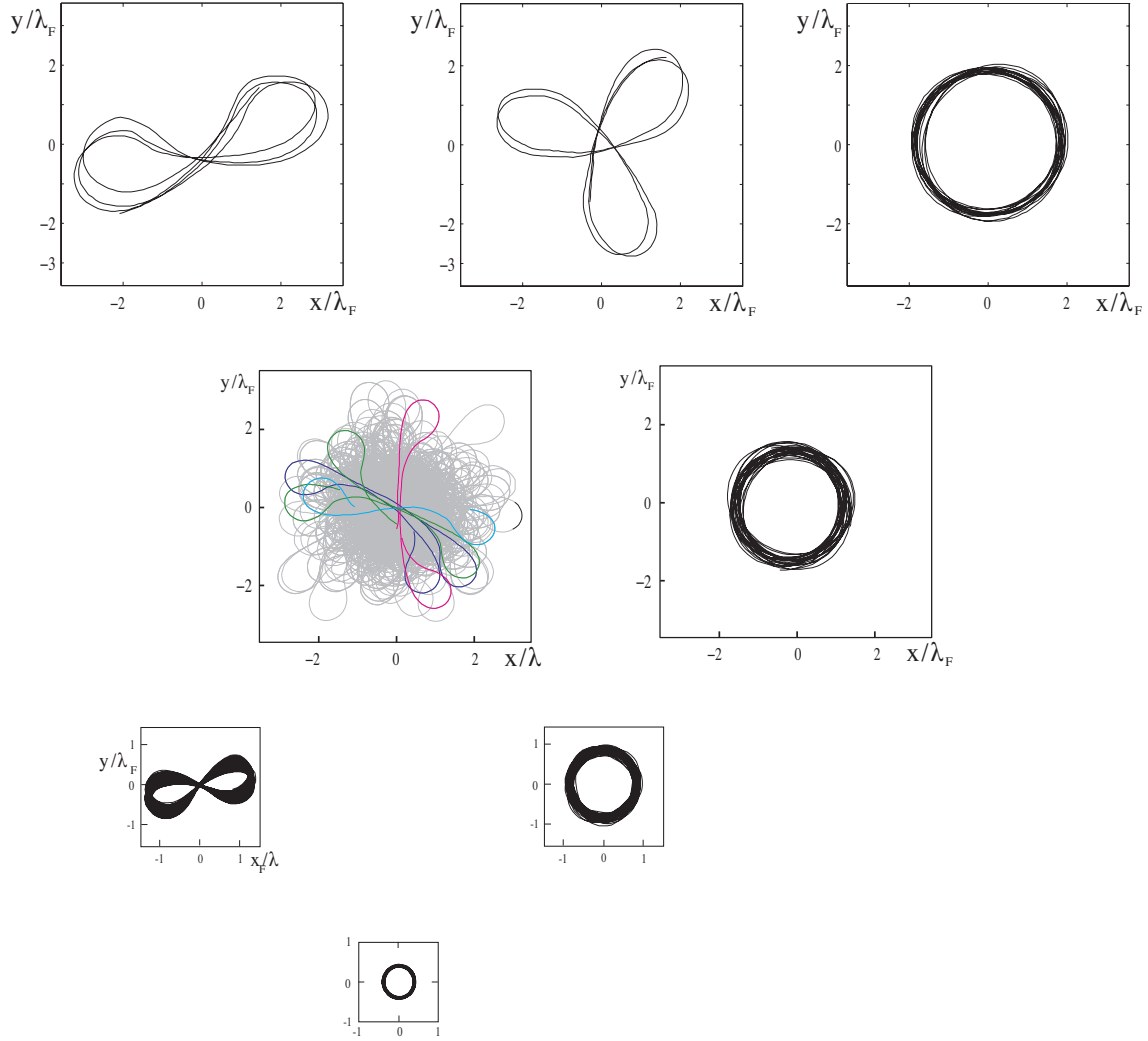


FIGURE 4.4 – Observées à la même échelle, les trajectoires périodiques d'un marcheur dans des puits de potentiel harmonique de raideur décroissante. Ensemble des orbites stables périodiques observées expérimentalement, pour des valeurs de confinement Λ allant de 0.3 à 2 et une mémoire $30 < Me < 100$, mises à la même échelle. Il en résulte une large variété de trajectoires observées, présentant des symétries variées. Une trajectoire non stable a été ajoutée au tableau, il s'agit de grandes boucles présentes de manière récurrente dans les trajectoires observées. Les trajectoires ont été classées verticalement en fonction de leur extension spatiale et horizontalement en fonction de leurs symétries. Un tri quantitatif de ces orbites est proposé plus loin dans ce chapitre.

allant de $Me = 30$ à $Me = 100$. Toutes les trajectoires ont été représentées à la même échelle, par ordre croissant de taille selon l'axe vertical, et selon leur symétrie selon l'axe horizontal. Ce premier tri sera rationalisé plus loin dans le chapitre.

On désigne ici par orbite stable les trajectoires périodiques simples qui ont été observées dans une large gamme de paramètres de mémoire Me et de confinements Λ . A ce titre, une trajectoire est considérée comme stable si elle a été observée sur un temps long devant sa période propre, de manière reproductible, et dans une large gamme de valeurs de la mémoire Me et du confinement Λ .

Il est ainsi possible d'observer suivant la valeur du paramètre de mémoire Me et du confinement Λ des trajectoires en cercle, en ovale, en huit appelées aussi *lemniscate*, ou à trois boucles appelées *trifolium*. La présence d'orbites circulaires est une continuité directe de la dynamique observée à basse mémoire au chapitre 3 auquel s'ajoute un processus de quantification à haute mémoire.

Les autres types d'orbites ne correspondent en revanche à aucune trajectoire classique, *i.e.* observée dans une situation de faible mémoire pour un puits de potentiel harmonique. Ce type de trajectoires, comme la lemniscate ou le trifolium, n'est pas même solution d'un problème à force centrale puisqu'il n'y a pas conservation du moment cinétique au cours du temps. Enfin, notons que chacun des types de trajectoires possède une taille et une symétrie spécifiques, révélant l'existence de possibles règles de sélection des orbites stables.

4.2 Règles de sélection des orbites stables

Cette famille de trajectoires stables présente deux nouvelles caractéristiques principales par rapport aux orbites circulaires précédemment observées.

D'une part, l'observation de trajectoires non solution d'un problème à force centrale interroge notre compréhension de la dynamique du marcheur. Qu'est ce qui fixe la forme d'un huit ? Existe-t-il une expression analytique simple pour décrire les trajectoires suivies ?

D'autre part, l'existence possible d'une sélection de taille et de symétrie des orbites suivies soulève une question plus générale : existe-t-il une structure sous-jacente régissant les solutions d'un marcheur dans un puits harmonique ?

Les trajectoires stables observées appartiennent à la famille des courbes de Cassini. Le lien sera explicité au chapitre 6. Seul un bref résumé de ces résultats étant nécessaire ici pour définir le type de trajectoires observées, il est donné ci-dessous.

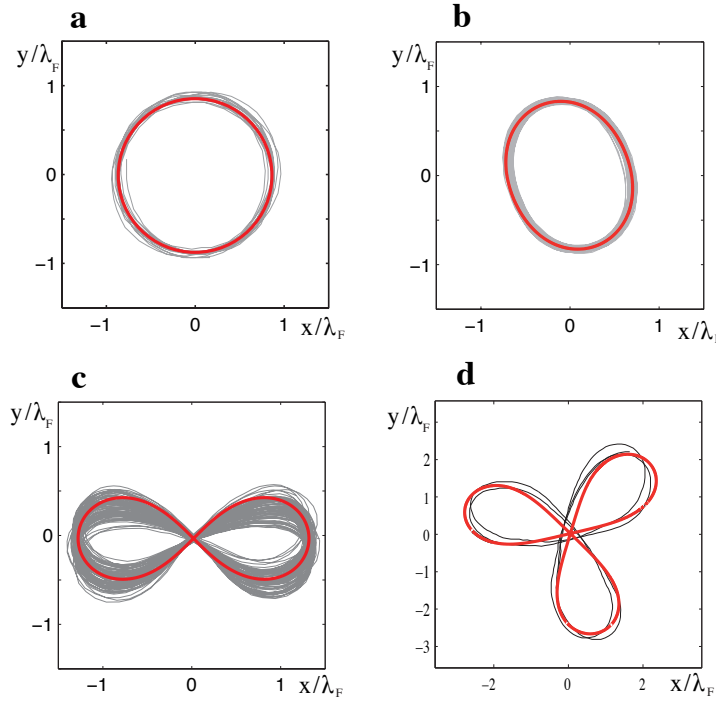


FIGURE 4.5 – **Orbites périodiques : des Courbes de Cassini généralisées.** Les trajectoires périodiques stables correspondent à des courbes de Cassini généralisées, définies comme le lieux des points tel que le produit de la distance à k points fixes soit constant. $k = 1$ correspond au cercle, $k = 2$ aux cercles, ovales et lemniscate de Bernoulli (huit), $k = 3$ au trifolium. a) Cercle de rayon $R=1.35$, obtenue pour $\Lambda = 1.3$ et $Me = 50$. b) Ovale obtenu pour $\Lambda = 0.82$ et $Me = 35$. c) Trajectoire en huit obtenu pour un confinement $\Lambda = 0.7$, et un paramètre de mémoire $Me = 36$. Ce type de trajectoire peut être interpolée par une lemniscate de Bernoulli caractérisée par un seul paramètre, comme son demi grand axe. d) Trifolium (Courbe de Cassini pour $k = 3$) obtenu pour $\Lambda = 1.6$ et $Me = 50$. Notons que les trajectoires présentées en b), c) et d) ne sont pas solutions d'un problème à force centrale, puisque le moment cinétique n'est pas conservé au cours du temps.

4.2.1 Une famille de courbes géométriques : les Cassiniennes

Caractérisation géométrique

L'ensemble des trajectoires stables observées appartient à une même famille de courbes géométriques. Il s'agit des courbes de Cassini généralisées, définies comme le lieu des points tel que le produit de la distance à k points fixes soit constant le long de la courbe [13]. L'équation en coordonnées polaires (r, θ) d'une courbe de Cassini est donnée par :

$$r^{2k} - 2e^k r^k \cos(k\theta) + e^{2k} - r_0^{2k} = 0 \quad (4.3)$$

où l'entier k correspond à l'ordre de la Cassinienne, r_0 à sa taille et e à son excentricité, *i.e.* à la distance relative entre les points fixes par rapport à l'extension r_0 de la trajectoire. Par exemple pour $k = 2$ et $e = 1$, on obtient une lemniscate de Bernoulli, dont la forme géométrique correspond bien aux trajectoires en huit observées expérimentalement (voir courbe rouge de la figure 4.5 c). Il en va de même pour les ovales ($k = 2$, e allant de 0 à 0.7) (voir figure 4.5 b) et le trifolium ($k = 3$, $e \approx 1$) (voir figure 4.5d).

Ces courbes de Cassini généralisées apparaissent dès que la longueur de persistance S_{Me} devient de l'ordre du diamètre d'une boucle élémentaire ($S_{Me} \approx 0.7$). Les lemniscates sont ainsi observées pour une mémoire $Me > 25$ dans une large gamme du confinements Λ . Deux plages d'existence ont pu être mis en évidence, pour $0.55 < \Lambda < 0.8$ et $1.2 < \Lambda < 1.5$.

Les trifolia apparaissent pour des paramètres de mémoire comparables ($Me > 25$), et des confinements plus faibles $1.4 < \Lambda < 1.6$. Comme les lemniscates, la présence de trifolia persiste à plus haute mémoire.

Précession des trajectoires périodiques

Suivant le confinement Λ imposé au marcheur, les Cassiniennes peuvent être observées parfaitement stables dans l'espace ou présenter divers types d'instabilités. La figure 4.6 présente un exemple des différents modes de déstabilisation observés, associés aux différents types d'orbites stables. Ces modes d'instabilité peuvent correspondre à un décalage de la trajectoire par rapport au centre ou à une rotation lente du motif autour de l'axe de symétrie du puits.

Pour chaque type de Cassinienne, les deux types d'instabilité peuvent être observés. C'est d'ailleurs la déstabilisation des trajectoires circulaires qui mènent à l'apparition à plus haute mémoire des Cassiniennes d'ordre supérieur tel que l'ovale ($k = 2$), la lemniscate ($k = 2$) ou le trifolium ($k = 3$). Les zones d'apparition de telles instabilités et les mécanismes sous-jacents seront étudiés au chapitre 5.

Ces analogues des trajectoires périodiques stables, mais en précession ou translaté par rapport au centre restent tout de même voisins des orbites périodiques simples. En effet, à l'échelle d'une période, leur taille ainsi que leur forme restent voisines de celle de l'orbite stable comme le montre les extraits des trajectoires sélectionnées parmi les orbites en précession en figure 4.6. Un autre type de déstabilisation des lemniscates apparaît de manière récurrente dans les trajectoires. Il s'agit de grandes boucles allongées présentant les deux sens possibles de rotation (voir figure 4.4).

Les modes précéssant ou allongés, dont la forme sur une période évolue peu, ont été intégrés dans l'analyse des orbites périodiques stables que nous présentons

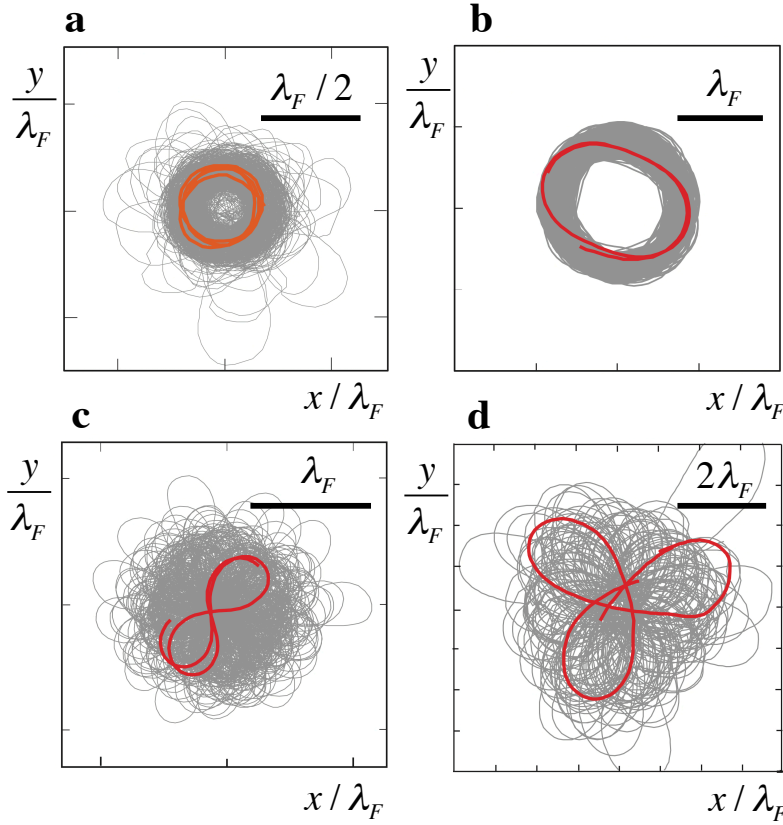


FIGURE 4.6 – **Précession des orbites stables.** Quatre exemples de trajectoires en rotation lente, régulière ou erratique, dans le repère du laboratoire. a) Précession de l'orbite autour du centre de symétrie pour un cercle avec $Me=100$, $\Lambda = 0.42$, $V = 11$ mm/s. b) Une ovale avec $Me=35$, $\Lambda = 0.79$ et $V = 8.6$ mm/s. c) Une lemniscate avec $Me=100$, $\Lambda = 0.57$ et $V = 8.6$ mm/s. d) Un trifolium avec $Me=60$, $\Lambda = 1.2$). Bien que la position par rapport au centre soit variable, la structure locale de la trajectoire reste identique. Ce type d'orbite a été intégré à l'étude des trajectoires périodiques simples.

ci-dessous.

Ainsi, il apparaît à haute mémoire un ensemble de trajectoires stables, correspondant aux courbes de Cassini généralisées. Les formes obtenues sont d'extension spatiale et de symétrie variées. Peut-on caractériser leur extension spatiale ? Qu'est-ce qui sélectionne les symétries des trajectoires ? Y a-t-il un lien entre extension spatiale et symétrie de la trajectoire observée ? Pour répondre à ces questions, on se propose de caractériser les orbites stables par des grandeurs moyennes.

4.2.2 Définition d'observables moyennes

L'apparition de trajectoires stables simples mais de symétries variées appelle un besoin de caractérisation. S'il est possible de comparer des cercles entre eux via leur

taille uniquement ce critère n'est pas suffisant pour distinguer, par exemple, un cercle et une lemniscate de même extension spatiale. Pour comparer des trajectoires à deux dimensions d'espace il est donc nécessaire de les classer à l'aide de deux observables. On choisit tout d'abord de définir une extension spatiale moyenne normalisée \bar{R} comme :

$$\bar{R} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \frac{r_k^2(t)}{\lambda_F^2}} \quad (4.4)$$

où $\{r_k\}$ représente l'ensemble des positions d'impacts de la goutte sur le bain repérées par rapport au centre du puits de potentiel. N est le nombre de rebonds choisi pour effectuer cette moyenne. Il s'agit donc d'une extension à une trajectoire quelconque de la définition du rayon d'une orbite circulaire. Pour un cercle, on retrouve bien $\bar{R} = R/\lambda_F$ quelle que soit la valeur de N . \bar{R} mesure donc une distance quadratique moyenne au centre du puits de potentiel. A noter que le choix d'une moyenne quadratique présente l'avantage d'associer au mouvement de la goutte dans le champ de force central une énergie potentielle moyenne \bar{E}_p définie par :

$$\bar{E}_p = \frac{\bar{R}^2}{\Lambda^2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \frac{\omega^2 r_k(t)^2}{V^2} \quad (4.5)$$

A cette extension spatiale moyenne normalisée \bar{R} est ajoutée une seconde observable, le moment cinétique moyen normalisé \bar{L} . Il est défini comme la moyenne du moment cinétique sur un nombre N de rebonds passés :

$$\bar{L} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \frac{\vec{r}_k}{\lambda_F} \times \frac{\vec{V}_k}{V_0} \quad (4.6)$$

où la moyenne temporelle peut être effectuée sur un temps arbitraire NT_F . Le but étant de mettre en évidence les propriétés génériques des orbites stables, les moyennes temporelles sont effectuées sur une période T du mouvement. Le nombre N de rebonds à prendre en compte dépend donc de la trajectoire considérée.

4.2.3 Une famille de mode propres

Quantification de \bar{R} et \bar{L}_z

A partir de ces définitions, l'extension spatiale \bar{R} et le moment cinétique moyen \bar{L} des orbites stables peuvent être représentés en fonction du paramètre de confinement Λ comme le montre la figure 4.7. Cette représentation met en évidence l'apparition des différents types d'orbites stables au fur et à mesure que l'on diminue la raideur du puits (Λ croissant). Chaque mode n'apparaît que dans une gamme

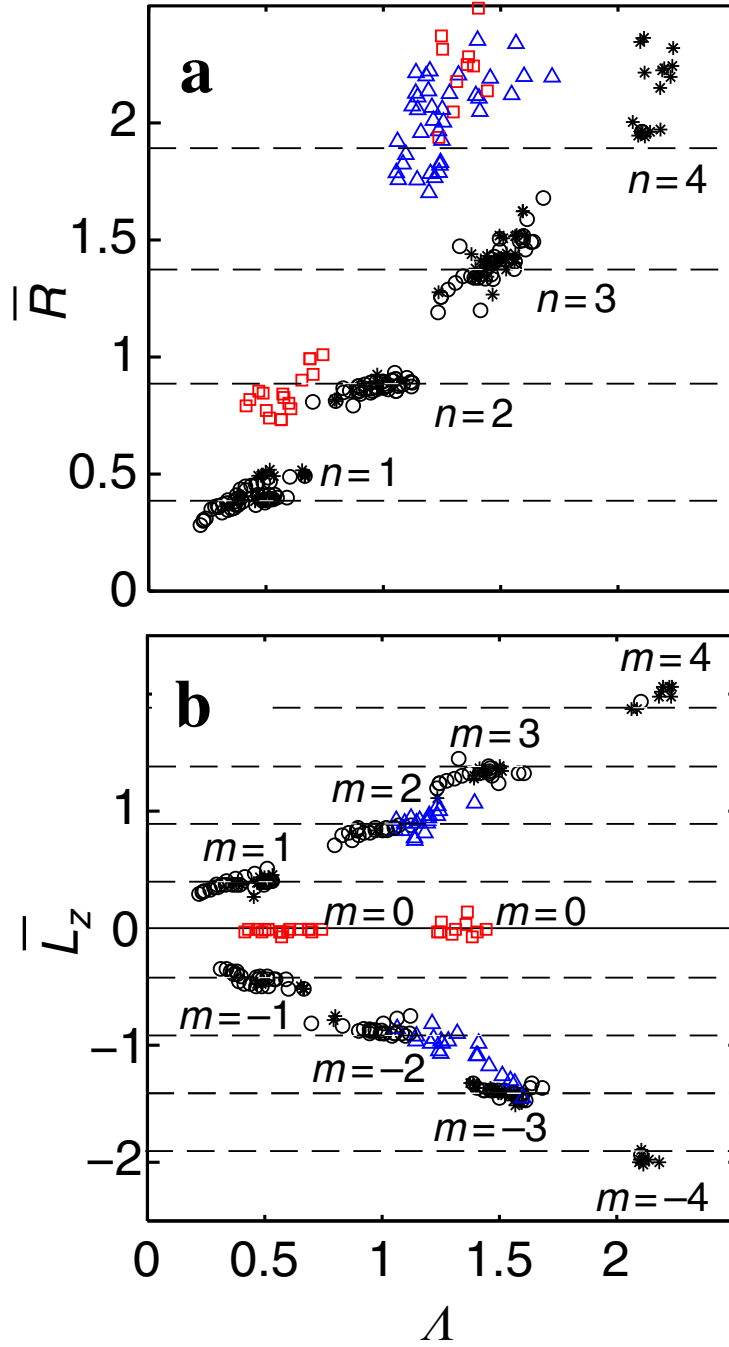


FIGURE 4.7 – **Quantification de l'extension spatiale et du moment cinétique.** a) Extension spatiale moyenne \bar{R} calculée à partir de l'équation 4.4 en fonction du confinement Λ pour l'ensemble des orbites stables ou précessantes observées. Cercles (\circ), Epicycles ($*$), Lemniscates (\square), Trifolium (\triangle). b) Moment cinétique moyen \bar{L} calculé à partir de l'équation 4.6 en fonction du confinement Λ , pour le même jeu de trajectoire. Les deux représentations mettent en évidence une accumulation des points de mesure au voisinage de valeurs particulières de \bar{R} et \bar{L} . Les lignes pointillées correspondent à la prédiction théorique dans la limite $Me \rightarrow +\infty$ valant $\bar{R}_n = 0.37, 0.87, 1.37, 1.87$. et $\bar{L}_m = 0, \pm 0.37, \pm 0.87, \pm 1.37, \pm 1.87$.

limitée de valeur de Λ . A l'intérieur de chacune des plages, on observe une accumulation des points au voisinage de valeurs particulières de l'extension spatiale \bar{R} (voir figure 4.7a), comme du moment cinétique \bar{L} (voir figure 4.7b). Cette accumulation s'applique aussi bien aux trajectoires circulaires qu'aux autres types d'orbites stables comme les lemniscates ou les trifolia. Les lignes en pointillés correspondent au résultat théorique obtenu dans le cas de trajectoires circulaires (cf seconde partie de chapitre). Il est remarquable d'observer que les autres types d'orbites stables, comme les lemniscates (\square) ou les trifolium (\triangle) correspondent également aux règles de sélection des orbites circulaires. La dispersion des points autour des valeurs théoriques augmente cependant avec la taille des orbites. Cet effet peut être imputé à une mémoire insuffisante pour quantifier les grandes orbites. En effet, en cas d'un confinement faible correspondant à des orbites de large périmètre la longueur de persistance S_{Me} est inférieure au périmètre de la trajectoire suivie. Dans ce cas, la quantification globale disparaît, le temps de persistance des ondes étant inférieur au temps de parcours moyen de l'espace accessible au marcheur.

On peut également remarquer que la quantification du moment cinétique est plus fine que celle de l'extension spatiale. Ces observables correspondent en fait à un niveau de description légèrement différent. Le moment cinétique est relié au rayon de courbure de la trajectoire, il est donc défini sur une longueur typique de l'ordre du périmètre d'une boucle élémentaire. L'extension spatiale est quand à elle définie sur l'ensemble de la trajectoire périodique. La longueur de persistance S_{Me} nécessaire pour quantifier le moment cinétique est donc plus faible que pour l'extension spatiale \bar{R} .

Notons également que le graphe présenté en 4.7b n'a pas été symétrisé, le sens de rotation étant arbitrairement fixé par les conditions initiales. A ce stade, seules les orbites stables ou animées d'un lent mouvement de précession ont été retenues. Le cas des orbites plus complexes telles que celle présentée en introduction de ce chapitre (figure 4.2) sera traité au chapitre 5.

Emergence d'une famille de mode propre

L'apparition d'une double quantification, à la fois en extension spatiale \bar{R} et en moment cinétique moyen \bar{L} des orbites stables est ainsi révélé par le confinement d'un marcheur dans un simple puits de potentiel. Le confinement imposé Λ permet tout de même de sélectionner la trajectoire périodique choisie. En revanche, pour chacun des modes stables, ni l'extension spatiale ni le moment cinétique ne semblent dépendre du confinement imposé, mais uniquement de la longueur d'onde λ_F .

Les trajectoires peuvent donc finalement être représentées en fonction de leur paramètres physiques intrinsèques, que sont l'extension spatiale moyenne \bar{R} et le

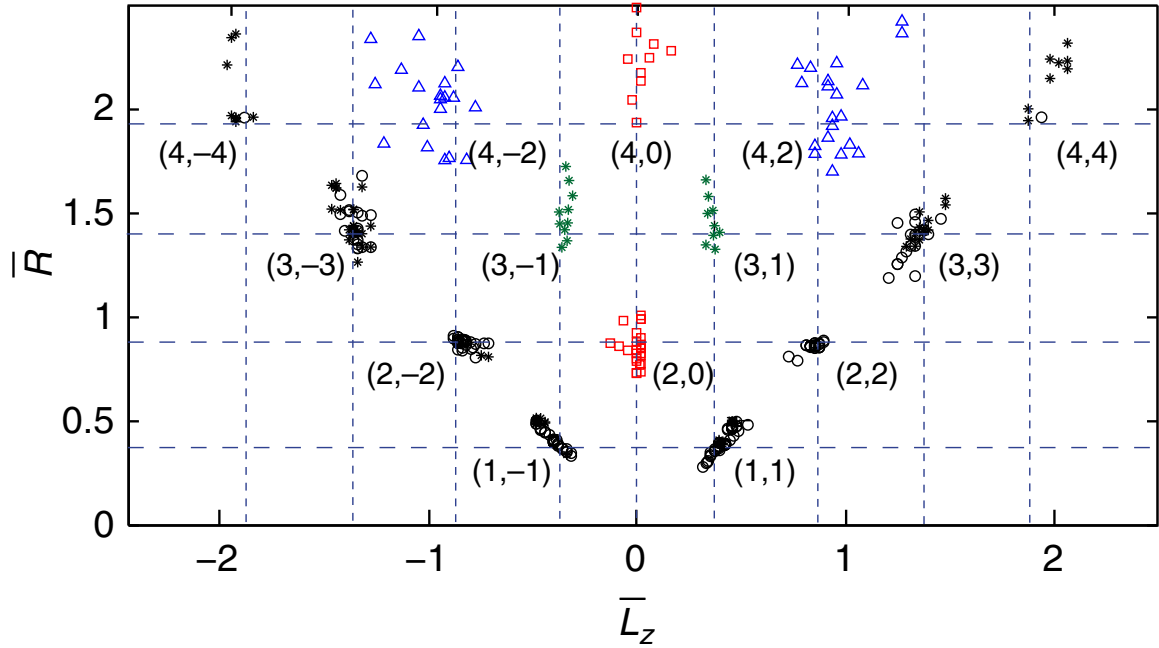


FIGURE 4.8 – **Double quantification des orbites stables.** Extension spatiale moyenne \bar{R} des orbites stables en fonction du moment cinétique moyen \bar{L} . L'ensemble des trajectoires se localisent aux noeuds d'un réseau caractérisé par deux entiers (n, m) donnant le niveau d'orbite n et le niveau de moment cinétique m . Les lignes pointillées correspondent aux zéros de la fonction de Bessel J_0 , soit $\bar{R}_n = 0.37, 0.87, 1.37, 1.87$. et $\bar{L}_m = 0, \pm 0.37, \pm 0.87, \pm 1.37, \pm 1.87$. Seul les noeuds du réseau tels que $n + m$ est pair correspondent à une trajectoire expérimentale

moment cinétique moyen \bar{L} , comme le montre la figure 4.8. Dans cette représentation, les points expérimentaux correspondant aux cercles, épicycles, lemniscates, trifoilium et grandes boucles se regroupent par type de trajectoires disjoint. Notons que la dispersion des points augmente avec l'extension spatiale des trajectoires, et qu'elle est plus marquée dans la direction \bar{R} que dans la direction \bar{L} .

L'accumulation de points autour de valeurs particulières du couple d'observable (\bar{R}, \bar{L}) invite à caractériser les trajectoires périodiques par un couple d'entiers (n, m) où n correspond au niveau d'extension spatiale et m désigne le niveau de moment cinétique. Cette représentation permet ainsi de classifier l'ensemble des trajectoires stables observées dans un puits de potentiel harmonique en fonction de la valeur moyenne de deux grandeurs physiques uniquement. On trouve que la sélection de taille des trajectoires suit les règles empiriques suivantes :

- L'extension spatiale \bar{R} prend des valeurs discrètes, qui valent : $\bar{R}_1 = 0.37 \pm 0,02$, $\bar{R}_2 = 0.86 \pm 0,03$, $\bar{R}_3 = 1.4 \pm 0,05$, $\bar{R}_4 = 1.9 \pm 0.1$. Ces valeurs sont proches des zéros successifs $\{R_n\}$ de la fonction de Bessel J_0 . L'indice du zéro

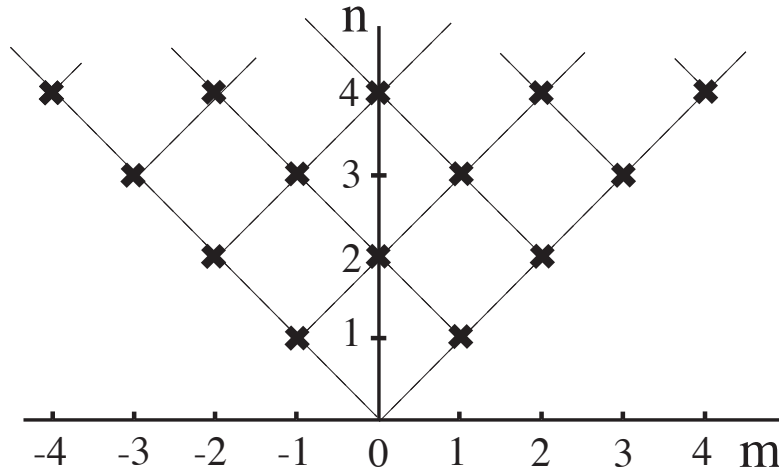


FIGURE 4.9 – **Règle de sélection des modes propres.** Les mesures de l'extension spatiale \bar{R} et du moment cinétique \bar{L} permettent d'associer un couple d'entier (n, m) à chaque type d'orbite stable. n correspond au niveau d'extension spatiale \bar{R} , et m au niveau d'énergie cinétique \bar{L} . Les règles de sélection qui régissent les couples d'entier (n, m) possibles sont illustrés sur le schéma. La règle de sélection émergente est n entier et $m = n, n - 2, \dots, -n$, analogue à celle des fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique quantique à deux dimensions d'espace [14].

de J_0 définit le premier nombre n de cette quantification.

- Le moment cinétique \bar{L} prend également des valeurs discrètes, positives ou négatives, telles que $\bar{L} = -1.87, \dots, -0.37, 0, 0.37, \dots, 1.87$. La valeur du second nombre m de cette quantification est ainsi donnée également par la valeur des zéro de J_0 , en étendant la définition aux entiers relatifs par symétrie.
- L'extension spatiale \bar{R} et le moment cinétique \bar{L} quantifiés sont reliés entre eux par une règle de sélection empirique sur le couple d'entier (n, m) , telle que le second nombre de quantification $m \in \{-n, -n + 2, \dots, n\}$.

Ces règles de sélection des entiers n et m sont illustrées graphiquement en figure 4.9.

4.2.4 Conséquences

Cette représentation des orbites périodiques en fonction de deux observables moyenne que sont l'extension spatiale \bar{R} et le moment cinétique \bar{L}_z permet de définir une famille de modes propres caractérisée par deux entiers naturels (n, m) . Leur taille comme leur moment cinétique sont reliés à la longueur d'onde de Faraday λ_F , provenant du champ d'onde environnant.

Les caractéristiques des états semblent ainsi être définies par le champ d'onde

associé, et non par le potentiel extérieur imposé. La force extérieure a donc servi à forcer le marcheur à revisiter des zones où des ondes ont été émises dans un passé proche. L'interaction de la goutte avec ces ondes passées génère une force additionnelle, qui modifie la trajectoire suivie. Par effet d'*auto-organisation*, le marcheur se retrouve piégé dans une orbite stable par le champ d'onde qu'il a lui même créé. Le résultat est ainsi paradoxal : les orbites obtenues semblent être indépendantes du puits de potentiel qui a néanmoins servi à confiner le marcheur.

Le potentiel extérieur impose tout de même des symétries à respecter, qui vont dépendre de l'expérience considérée. C'est le cas par exemple d'un marcheur soumis à une force transverse au mouvement (expérience de Coriolis), où seules des orbites circulaires peuvent être observées [41]. Il apparaît alors uniquement une quantification des orbites circulaires. Les autres trajectoires à symétrie centrale (lemniscate par exemple) ne sont jamais observées [43].

D'autres méthodes de confinement d'un marcheur présentant les mêmes symétries que le puits de potentiel central devraient mettre en évidence le même type de trajectoires. Nous avons vérifié cette assertion en confinant un marcheur via ses ondes, dans une cavité circulaire. Le même type de modes propres peut alors être mis en évidence.

L'émergence de modes propres dont seules les symétries sont sélectionnées par la force exercée justifie *a posteriori* l'utilisation d'une force centrale harmonique, comme un moyen épuré de confiner un marcheur dans un puits de potentiel à symétrie centrale.

Au passage, notons que les règles de sélection des orbites stables observées, qui définissent deux entiers n et m sont identiques au cas d'une particule quantique dans un puits de potentiel harmonique à deux dimensions [14], qui sont représentées en figure 4.9. A ce stade, il s'agit uniquement de faits expérimentaux, aucune justification théorique de ces résultats n'ayant été présentés jusqu'alors. La seconde partie de ce chapitre présente quelques pistes d'explication.

4.3 Emergence de modes propres par auto-organisation

La dynamique d'un marcheur confiné met donc en évidence une famille de modes propres, dont les propriétés ne dépendent que des symétries du confinement qui a permis de générer ces modes propres. En revanche, les tailles d'orbites observées sont reliées à la longueur d'onde de Faraday par des règles de sélection simples. Par quel mécanisme ces modes propres peuvent ils être sélectionnés ?

Pour expliquer l'origine de la sélection des orbites stables, on se propose de passer en point de vue *ondulatoire* afin de décrire le champ d'onde associé aux orbites stables. Cette approche permettra de faire apparaître naturellement la longueur d'onde de Faraday λ_F comme une longueur caractéristique pertinente.

4.3.1 Décomposition du champ d'onde en modes propres

Champ d'onde associé à une trajectoire fermée

Nous avons vu au chapitre 1 que la dynamique d'un marcheur pouvait être décrite par une équation continue du mouvement, couplée à l'évolution d'un champ d'onde associé :

$$m_G \frac{d\vec{V}}{dt} = -\eta \vec{V} - C \vec{\nabla} h|_{\vec{\rho}=\vec{r}} \quad (4.7)$$

$$h(\vec{\rho}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_F ||\vec{\rho} - \vec{r}(t_n)||) e^{-n/Me} \quad (4.8)$$

où C désigne un coefficient de couplage entre la goutte et son champ d'onde. On cherche donc à décrire l'évolution du champ d'onde h comme une variable de la dynamique. La difficulté de cette description provient d'une dépendance à la fois en temps et en espace, les deux intervenant dans l'argument $J_0(k_F ||\vec{\rho} - \vec{r}(t_n)||)$. Pour découpler les variations temporelles et spatiales du champ d'onde, M. Miskin a proposé une méthode astucieuse de décomposition du champ d'onde, basée sur le théorème de Graf.

Base de solution des équations de Helmholtz

Le champ h généré par un marcheur est solution de l'équation de Helmholtz, en considérant des rebonds synchronisés, et en négligeant l'amortissement spatial (cf Chapitre 1 pour détails) :

$$\Delta h + k_F^2 h = 0 \quad (4.9)$$

où $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ désigne l'opérateur laplacien à deux dimensions. Une base de solution de cette équation est l'ensemble des fonctions de Bessel J_k centrées en un

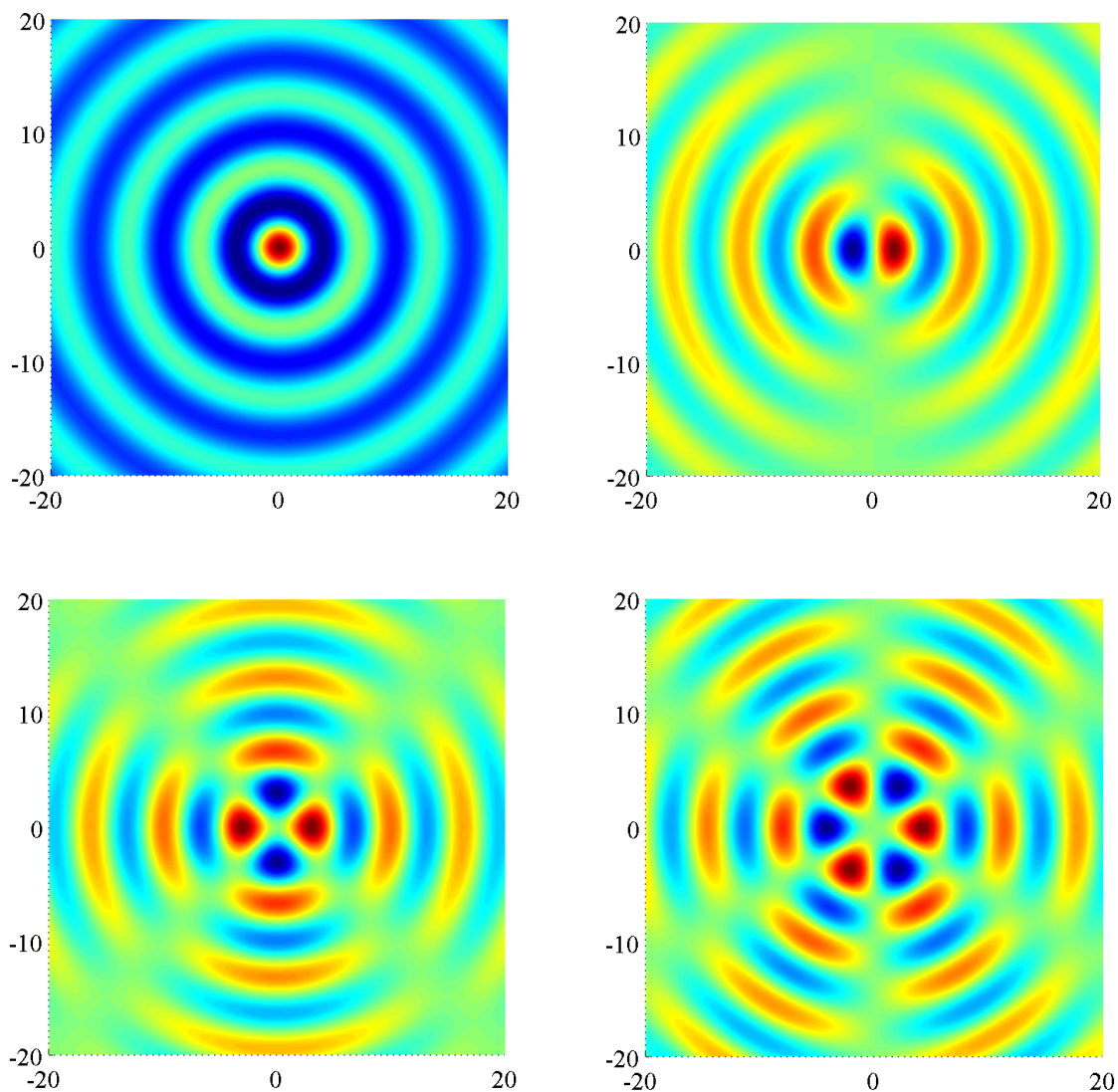


FIGURE 4.10 – **Premiers modes des fonctions de Bessel.** Représentation en niveau de couleur des premiers modes J_0, J_1, J_2, J_3 des fonctions de Bessel J_k , avec k entier. grâce au théorème de Graf, tout champ solution de l'équation de Helmholtz peut être décomposé sur cette base. Le mode J_0 est invariant par rotation, les modes J_k suivants sont invariants par rotation de π/k .

point quelconque de l'espace. Une illustration des premiers modes J_0 , J_1 , J_2 et J_3 est donnée en figure 4.10. Chacun d'eux présente une symétrie angulaire différente.

Une solution h de l'équation de Helmholtz peut donc être décomposée sur cette base des fonctions de Bessel J_k . L'expression en notation complexe du champ \bar{h} ($Re(\bar{h}) = h$) s'écrit :

$$\bar{h}(\vec{\rho}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_k J_k(k_F \rho) e^{ik\phi} \quad (4.10)$$

où (ρ, ϕ) correspondent aux coordonnées du repère polaire centré sur le lieu de la décomposition, k_F est le vecteur d'onde des ondes de Faraday, et \bar{h}_k sont les coefficients complexes de h dans la base des J_k .

Théorème de Graf

Dans le cas d'un champ h s'exprimant sous la forme d'une somme de fonctions de Bessel J_0 :

$$h(\vec{\rho}) = \sum_{n=0}^N a_n J_0(k_F ||\vec{\rho} - \vec{r}_n||) \quad (4.11)$$

Le théorème de Graf [88] permet d'expliciter les coefficients \bar{h}_k de la décomposition en fonctions de Bessel J_k sous la forme :

$$\bar{h}_k(t) = \sum_{n=1}^N a_n J_k(k_F r_n) e^{-ik\theta_n} \quad (4.12)$$

Application du théorème de Graf au champ d'onde d'un marcheur

Le champ h généré par un marcheur est solution de l'équation de Helmholtz, il peut donc être décomposé sur la base des fonctions de Bessel J_k , centrées en un point quelconque de la surface.

Dans le cas d'un marcheur soumis à un puits de potentiel central, le centre de symétrie des trajectoires périodiques coïncide avec l'axe de symétrie de l'aimant. Pour la caractérisation du champ associé à une trajectoire périodique, il est donc judicieux de le décomposer selon le centre de symétrie du puits de potentiel.

L'expression du champ d'onde h généré par un marcheur est de la forme de l'équation 4.11, *i.e.* une somme de fonctions de Bessel J_0 d'amplitude $a_n = e^{-n/Me}$ et de position $\vec{r}_n = \vec{r}(t_n)$ correspondant aux lieux d'impact successifs de la goutte sur le bain. L'expression en notation complexe du champ \bar{h} généré par un marcheur

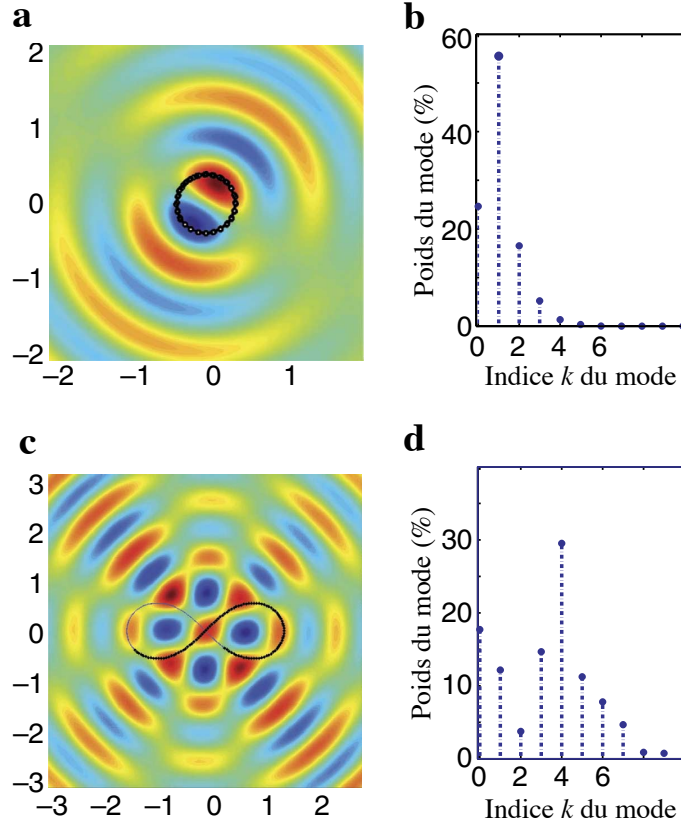


FIGURE 4.11 – **Décomposition de champs d’onde dans la limite $Me \rightarrow +\infty$.** Décomposition sur la base des fonctions de Bessel J_k centrées sur l’axe de l’aimant. a) Trajectoire circulaire entourée d’un champ d’onde reconstitué. b) Amplitude h_k de chacun des modes de la décomposition avec absence relative du mode J_0 et dominance du mode J_1 . c) Trajectoire de type lemniscate, entourée de son champ reconstitué, qui présente une symétrie d’ordre 4. d) Décomposition en mode du champ associé à une lemniscate. Malgré l’absence de symétrie par rotation de $\pi/2$, le mode J_2 est inhibé. Le mode J_4 est cette fois dominant.

s’écrit donc :

$$\bar{h}(\vec{\rho}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_k J_k(k_F \rho) e^{ik\phi} \quad (4.13)$$

$$\bar{h}_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n/Me} J_k(k_F r(t_n)) e^{-ik\theta(t_n)} \quad (4.14)$$

Où l’instant t_n représente le n -ième rebond précédent de la goutte sur la surface, et (r, θ) la position de la goutte en coordonnées polaires. Ces positions successives $\vec{r}(t_n)$ de la goutte sont repérées à la même phase du rebond (*e.g.* le décollage), la durée entre deux rebonds $t_n - t_{n-1}$ est donc d’une période de Faraday T_F .

Le champ d’onde est ainsi décrit par des composantes de symétries différentes, toutes centrées sur l’axe de symétrie du potentiel. Les premiers modes J_k de la

décomposition sont représentées sur la figure 4.10. Pour chaque fonction de Bessel J_k est associée une symétrie circulaire d'ordre k . Ainsi, J_0 est invariante par rotation, J_1 est antisymétrique, et le mode J_k pour $k > 1$ est invariant par rotation de $2\pi/k$.

L'évolution du champ d'onde au cours du temps est alors décrite par un nombre limité de coefficients \bar{h}_k de la décomposition. L'amplitude h_k de chacun de ces termes va dépendre de la trajectoire suivie.

Pour une trajectoire bornée, le nombre de modes de champ excités reste limité. En effet, chaque mode J_k est quasi-nul sur un intervalle $[0, a_k]$, avec $a_k \propto k$ pour $k > 5$. Par exemple pour une orbite $n = 1$, tous les modes au delà de J_6 ne seront pas excités. Cette propriété importante permet de restreindre le nombre de degrés de liberté du champ d'onde, en fonction de l'extension spatiale de la trajectoire suivie.

La figure 4.11 présente deux archétypes de trajectoires dont le champ d'onde associé a été décomposé sur cette base de fonctions de Bessel J_k centrés, dans la limite de haute mémoire (*i.e* $MeT_F \gg T$ ou $S_{Me} \gg 2\pi R$). La figure 4.11a présente une trajectoire circulaire pure, dont le champ d'onde associé présente des similitudes avec le mode J_1 . La décomposition met en effet en évidence que le mode J_1 contribue pour 55% à l'amplitude totale du champ. La phase ϕ_1 du mode J_1 évolue en temps, de sorte que ce mode est fixe dans le repère de la goutte. Dans le cas d'une orbite circulaire, le mode J_1 et les ordres plus élevés tournent avec la goutte. Ces modes sont responsables de la force tangente à la trajectoire exercée sur la goutte, et qui la propulse ainsi. On remarque la relative faiblesse de l'amplitude du mode J_0 , présentant pourtant la même symétrie que la trajectoire suivie. Cet effet sera expliqué plus loin.

La figure 4.11c présente une trajectoire de symétrie différente, la lemniscate. Le champ d'onde associé présente une invariance par rotation de $\pi/2$, mettant en évidence un mode J_4 . Celui ci représente en effet 30% de l'amplitude totale, comme le montre la figure 4.11d.

Le lien entre symétrie des trajectoires et symétrie des champs n'est donc ici pas évident. Dans le cas d'une orbite circulaire, invariante par rotation, on pourrait s'attendre à ce que le mode J_0 soit prédominant. De même, dans le cas d'une lemniscate, l'invariance par rotation de π de la trajectoire devrait sélectionner le mode J_2 . Pourquoi les premiers modes de même symétrie que la trajectoire ne sont pas prépondérants ?

4.3.2 Phénomène d'auto-organisation entre la goutte et son onde : cas circulaire

Pour analyser le phénomène de quantification, on se propose d'appliquer cette décomposition au cas d'une orbite circulaire. Le cas des trajectoires non circulaires

sera abordé au chapitre 6. Le mouvement d'un marcheur le long d'une trajectoire circulaire s'effectue à vitesse constante V_0 , donnée par la propulsion par les ondes. Cet effet a été démontré dans la limite basse mémoire (voir chapitre 3). Par souci de simplification, nous l'étendons ici au cas de plus haute mémoire. On considérera donc dans toute la suite que le marcheur parcourt l'orbite circulaire à une vitesse V constante égale à V_0 .

Comme illustré sur la figure 4.11b, le champ associé à une trajectoire circulaire présente un grand nombre de composantes. On se propose ici d'analyser uniquement l'influence du mode J_0 , et de faire un bilan selon la direction radiale. On néglige donc la contribution des autres modes selon la direction radiale.

En utilisant la décomposition en mode, le bilan radial des forces devient :

$$\frac{V_0^2}{R} = -\omega^2 R + F_{\text{ondes}} \quad (4.15)$$

où F_{ondes} désigne la force exercée par les ondes sur la goutte. En ne conservant que la contribution du mode J_0 , il vient :

$$F_{\text{ondes}}(R) = -\tilde{C} J_0(k_F R) J_1(k_F R) \quad (4.16)$$

avec $\tilde{C} = CMek_F$. Le coefficient de couplage \tilde{C} entre goutte et champ est donc proportionnel au paramètre de mémoire Me .

La force F_{ondes} exercée par les ondes sur la goutte s'exprime donc comme un produit de $J_0(k_F R)$ par $J_1(k_F R)$. Cette expression est illustrée graphiquement par la figure 4.12.

A chaque impact, la goutte va exciter le mode centré J_0 . A la manière d'une baguette tapant sur un tambour, l'amplitude d'excitation du mode va dépendre du lieu d'impact. L'excitation du mode sera maximale en tapant sur un ventre du mode, par exemple au centre du tambour. Elle sera en revanche nulle si l'impact a lieu sur un noeud du mode. Dans le cas d'un marcheur parcourant une orbite de rayon R , ce mécanisme est illustré par la figure 4.12a. Pour une orbite de rayon R_1 égale au zéro du mode J_0 , l'amplitude A_0 du J_0 sera nulle et le marcheur n'excitera pas de mode centré. Pour une orbite $R_A < R_1$, les rebonds de la goutte excitent un mode centré J_0 , avec une amplitude $A_0(R_A) = J_0(R_A)$. De même, pour une orbite $R_B > R_1$, les rebonds de la goutte excitent un mode centré J_0 d'amplitude négative, avec $A_0(R) = J_0(R_B)$.

La construction du profil radial de hauteur du bain $h_R(r)$ est illustrée sur la figure 4.12b. Il est alors donné par le produit du profil radial $J_0(r)$ du mode J_0 par l'amplitude du mode $A_0(R) = J_0(R)$ qui dépend du rayon R de l'orbite suivie. Le champ h_{R_1} généré par une orbite de rayon $R = R_1$ est donc nul partout, le champ h_{R_A} généré par une orbite de rayon $R = R_A$ est donc positif sous la goutte située

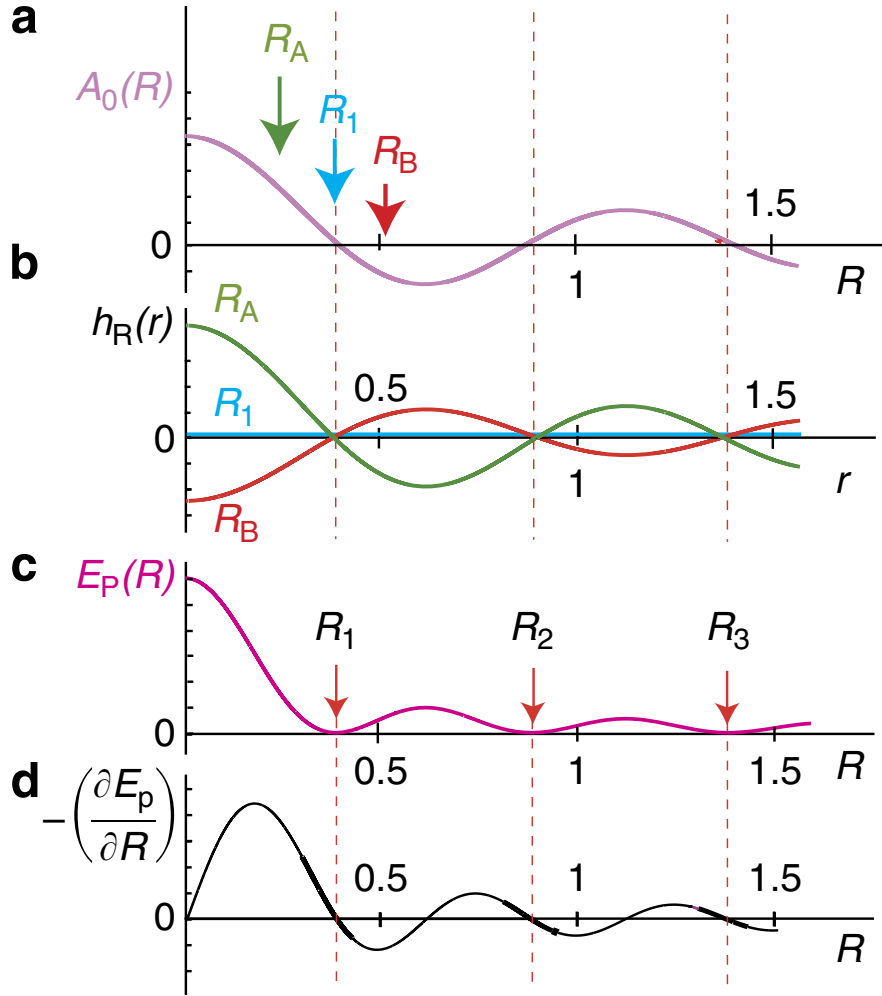


FIGURE 4.12 – **Excitation d'un mode centré par une trajectoire circulaire** Calcul de la force exercée par les ondes sur la goutte dans la limite d'une trajectoire circulaire. Le champ d'onde se résume à un mode J_0 axisymétrique. a) Amplitude $A_0(R)$ du mode J_0 en fonction du rayon R de la trajectoire suivie $A_0(R) \propto J_0(k_F R)$. b) Trois exemples de profils de surface $h_R(r)$ en fonction de la distance r du point d'observation. Ces profils ont été générés respectivement par des gouttes orbitant sur des cercles de rayons R_1 , R_A et R_B . L'orbite de rayon R_1 génère une onde d'amplitude nulle : la goutte étant située à un noeud du mode, elle ne l'excite pas. Dans le cas $R_A < R_1$, l'amplitude du mode est positive, et la force exercée est dirigée vers l'extérieur. Dans le cas d'un rayon $R_B > R_1$, l'amplitude du mode est négative et la force devient dirigée vers l'intérieur. Dans les deux cas, cette force dites de *mémoire* tend à ramener l'orbite vers la position d'équilibre stable R_1 . c) Hauteur $h \propto J_0^2(k_F R)$ du bain, calculée comme le produit de l'amplitude du mode par la valeur du mode en R . d) Force exercée $\vec{F}_m = \vec{\nabla} h$ par l'onde sur la goutte, en fonction du rayon de l'orbite suivie.

en R_A , et le champ h_{R_B} généré par une orbite de rayon $R = R_B$ est donc également positif sous la goutte située en R_B .

Finalement, le champ $h(R) \propto J_0(R)^2$ situé sous la goutte est tracé en fonction du rayon R de l'orbite suivie (figure 4.12). La force $F_{\text{ondes}}^{\rightarrow}$ exercée par les ondes sur la goutte s'exprime alors sous la forme :

$$F_{\text{ondes}}^{\rightarrow}(R) = -\vec{\nabla}_{|\vec{\rho}=R} h(\vec{\rho}, t) \quad (4.17)$$

Dans cette vision stationnaire, les positions d'équilibre stables correspondent à $F_{\text{ondes}}(R) = 0$ et $F'_{\text{ondes}}(R) < 0$. Le rayon R_n des orbites stables vérifient donc, dans la limite haute mémoire :

$$\min h(R) = R_n, \text{ avec } J_0(R_n) = 0 \quad (4.18)$$

La force exercée F_{ondes} selon la direction radiale est illustrée par la figure 4.12d. Au voisinage de chacun des minima de $h(R)$, cette force tend à ramener le marcheur vers sa position d'équilibre.

Un résultat essentiel est que dans la limite des grandes mémoires les rayons des orbites circulaires tendent vers les valeurs des zéros successifs de J_0 ($R_1 = 0.38$, $R_2 = 0.87$, $R_3 = 1.37$, $R_4 = 1.87$). Il est remarquable que dans l'état stable la composante J_0 du champ d'onde tend donc à ne pas être excitée. Elle guide la particule par un effet dynamique. Toute perturbation de l'orbite idéale se traduit par l'excitation du mode J_0 qui ramène le rayon de l'orbite vers sa valeur stable.

4.3.3 Mouvement d'une goutte dans un puits de potentiel ondulatoire

La vision stationnaire précédente peut être étendue à un mouvement dynamique dans le voisinage des orbites circulaires, dans la limite de perturbations du rayon lente devant le temps de mémoire. Cette approche, même restrictive, permettra de définir un potentiel ondulatoire pour la goutte, associé à la force exercée par les ondes. Par souci de simplicité, on ne considérera ici encore que le mode J_0 centré, fixe dans le repère du laboratoire. Les limites de ces approximations seront discutées ci après.

Pour marquer la différence avec l'équilibre statique présenté ci-dessus, on repèrera la position de la goutte en coordonnée polaires (r, θ) . L'approximation de trajectoires circulaires consiste à considérer la vitesse du marcheur comme égale à la vitesse orthoradiale V_θ . On se place donc dans la limite $V_r \ll V_\theta$. Dans ce cas, l'accélération \vec{a} selon la direction radiale s'écrit :

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - \frac{V_0^2}{r} \quad (4.19)$$

où la vitesse V_0 du marcheur est constante le long d'une trajectoire circulaire. À partir de l'équation 4.8, l'équation de la dynamique selon la direction radiale se réécrit donc sous la forme :

$$\ddot{r} = \frac{V_0^2}{r} - \omega^2 r + Ch_0(t)J_1(k_F r) \quad (4.20)$$

où h_0 correspond au coefficient du mode J_0 dans la décomposition en mode. Dans la limite de rebonds continus ($T_F \ll T$ où T est la période de l'orbite), h_0 peut s'exprimer sous la forme :

$$h_0(t) = \frac{1}{T_F} \int_{-\infty}^t J_0(k_F r(t')) e^{-\frac{1}{\text{Me}} \frac{t-t'}{T_F}} dt' \quad (4.21)$$

Ce coefficient h_0 introduit des corrélations temporelles dans l'équation du mouvement.

Une vision quasi-statique peut tout de même être obtenue dans la limite de perturbation lente devant le temps de mémoire, en approximant le terme de mémoire par un terme non dépendant du temps $r(t') \approx r(t)$. Il vient donc :

$$h_0(t) = \text{Me} J_0(k_F r(t)) \quad (4.22)$$

Finalement, l'équation du mouvement pour la goutte peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{r} = \frac{V_0^2}{r} - \omega^2 r + C \text{Me} J_0(k_F r) J_1(k_F r) \quad (4.23)$$

La dynamique d'un marcheur est ainsi réduite à une équation du second ordre, à une seule dimension d'espace. Cette expression ne fait intervenir que des forces conservatives, la dynamique selon la direction normale à la trajectoire (équivalente à radiale pour un cercle) peut donc être considérée comme conservative. On retrouve donc une des conclusions du chapitre 3 sur le marcheur amnésique, que l'entretien du mouvement agit selon la direction tangente.

L'équation 4.23 ne fait intervenir que des forces dépendant uniquement de la position de la goutte. Une description en terme énergétique est donc possible, en associant une énergie potentielle au puits harmonique et une à l'accélération centrifuge¹ :

$$E_p(r) = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 - V_0^2 \ln(r) \quad (4.24)$$

La force de mémoire F_{ondes} est quand à elle donnée par le gradient de la surface h au point d'impact, une énergie potentielle E_{ondes} liée au champ d'onde peut donc être définie sous la forme :

$$E_{\text{ondes}}(r) = C \text{Me} J_0^2(k_F r) \quad (4.25)$$

1. La contrainte de vitesse V_0 constante impose une accélération centrifuge $\approx V_0^2/r \vec{e}_r$. En multipliant cette expression par \vec{V} , on trouve $V_0^2/r \vec{e}_r \cdot \dot{r} \vec{e}_r \approx -d(-V_0^2 \ln(r))$.

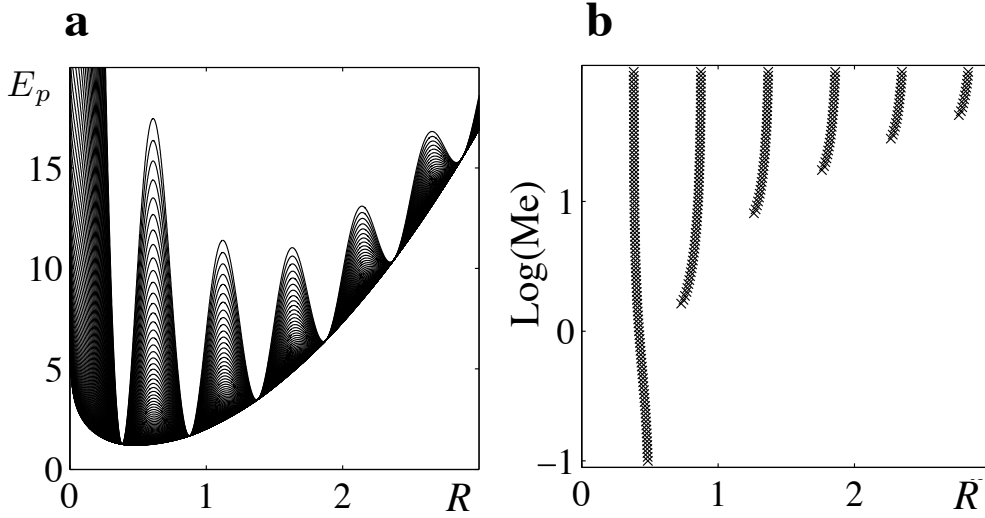


FIGURE 4.13 – **Construction du potentiel ondulatoire avec la mémoire.** a) Graphe de l'énergie potentielle totale $E_p + E_{\text{ondes}}$ du marcheur, pour différentes valeurs du paramètre de mémoire Me . Dans la limite Me faible, l'énergie correspond à un puits de potentiel possédant un seul minimum, pour $r = V/\omega$. Au fur et à mesure que la mémoire est augmentée, il apparaît un ensemble de minima, au voisinage de $r = R_n$. b) Position des minima d'énergie potentielle pour une valeur de la pulsation du champ $\omega = 2.2\text{s}^{-1}$, en fonction du paramètre de mémoire en ordonné. A Me faible, le minimum est égal ici à $r = 1/2.2 = 0.45$ en prenant $V_0 = 1$. Au fur et à mesure que Me est augmentée, ce zéro se cale sur le zéro de la fonction de Bessel J_0 . Il apparaît ensuite d'autres minima locaux, correspondant aux zéros successifs de J_0 .

Notons que cette énergie est proportionnelle au nombre de sources actives Me , par principe de superposition. Le profil de cette énergie potentielle est donné en figure 4.11c. Cette énergie varie en J_0^2 , et présente donc des minima au niveau des zéros de la fonction de Bessel d'ordre 0, J_0 . L'équation de la dynamique 4.23 peut finalement être réécrite sous une forme énergétique :

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + E_p(r) + E_{\text{ondes}} = \text{cte} \quad (4.26)$$

La particularité de cette équation provient de la définition du puits de potentiel E_{ondes} , qui résulte de l'interaction de la goutte avec son propre champ d'onde. Le profil total d'énergie potentielle est donc créé par la somme d'un terme classique E_p (force de rappel et contrainte de vitesse) et par un *potentiel ondulatoire* E_{ondes} provenant de la force exercée par le champ d'onde sur la goutte. Dans le cas général, ce potentiel E_{ondes} dépend de la trajectoire suivie. Ici, ces corrélations temporelles ont été négligées.

La figure 4.13a présente différents profils $E_p(r) + E_{\text{ondes}}$ obtenus pour des mémoires allant de $\text{Me} = 1$ à $\text{Me} = 500$, et une valeur donnée de la pulsation carac-

téristique ω . La limite basse mémoire commune à toute ces courbes correspond à $E_{\text{ondes}} = 0$, soit au terme $1/2\omega^2 r^2 - V_0^2 \ln(r)$ qui désigne le pseudo-potentiel classique E_p . Au fur et à mesure que la mémoire augmente, il apparaît des minima successifs dans l'énergie potentielle, due au potentiel ondulatoire E_{ondes} , d'amplitude $E_{\text{ondes}} \propto \text{Me}$. Ces minima locaux d'énergie apparaissent au voisinage des 0 de la fonction de Bessel d'ordre 0².

Le potentiel effectif varie donc continûment depuis le puits classique imposé par le champ magnétique pour une mémoire Me faible, jusqu'à un potentiel quasi-périodique donné par les ondes pour une mémoire Me longue.

Recherche de positions d'équilibre

La définition d'une énergie potentielle E_{ondes} associée à la force exercée par les ondes permet de rechercher les solutions circulaires stables, quelle que soit la mémoire Me . Les cercles stables correspondent aux positions d'équilibre données par les minima de l'énergie potentielle. La figure 4.13b présente le rayon R des minima d'énergie en fonction de la mémoire Me pour une valeur donnée du confinement Λ . A basse mémoire, il n'existe qu'un seul minimum, correspondant à $\Lambda = R/\lambda_F$. Pour une mémoire de l'ordre de $\text{Me} = 20$, il apparaît un second minimum dans la deuxième vallée du puits de potentiel généré par les ondes, puis d'autres à plus haute mémoire.

L'apparition successive de ces minima et le raidissement du potentiel ondulatoire provient de l'augmentation du temps de mémoire Me . Une conséquence importante est que le rayon des positions d'équilibre converge vers les valeurs correspondant aux zéros de J_0 . Comme l'amplitude du champ est proportionnel à J_0 , il y a, au fur et à mesure que la mémoire augmente, diminution de la contribution individuelle de chaque source. Il apparaît donc une condition de non excitation : une trajectoire stable à haute mémoire correspond à une taille d'orbite pour laquelle le champ généré est d'amplitude minimale.

4.3.4 Emergence d'une quantification des modes $n = m$

Validation expérimentale

Cette approche théorique peut être vérifiée en comparant les résultats au cas expérimental. La figure 4.14a présente les rayons moyens \bar{R} des orbites circulaires observées en fonction du paramètre de mémoire Me . Ce diagramme a été mis en

2. Notons tout de même que cette expression de l'énergie potentielle est valable dans la limite d'une trajectoire circulaire. Dans le cas de variations du rayon sur une échelle de temps comparable ou plus rapide que le temps de mémoire Me , l'expression de l'amplitude du mode de Bessel J_0 pourra varier dans le temps.

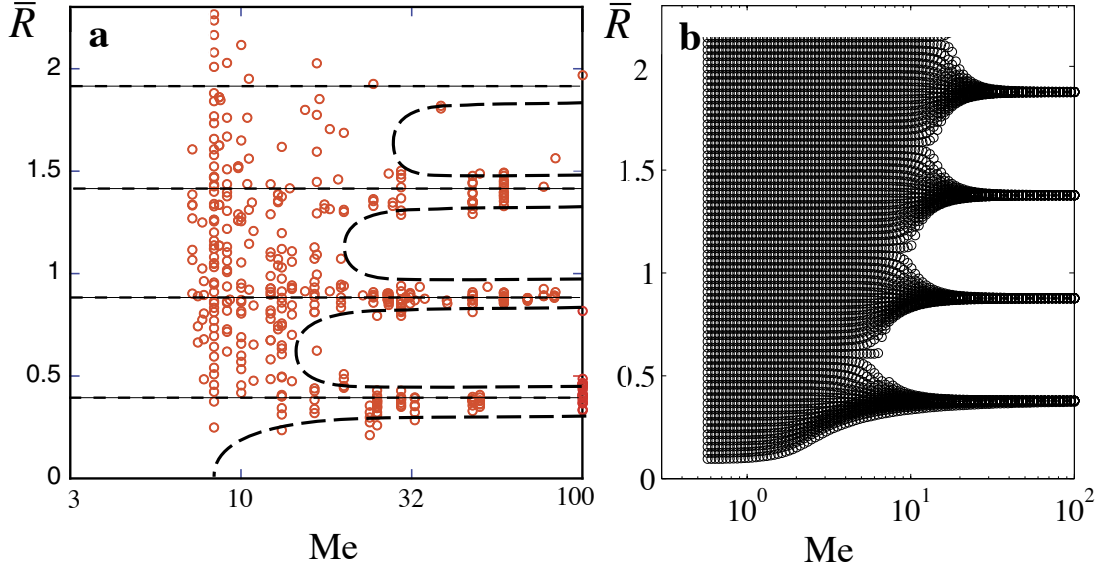


FIGURE 4.14 – **Potentiel ondulatoire et quantification des orbites $n = \pm m$.** a) Figure expérimentale de l'ensemble des trajectoires circulaires observées pour un marcheur dans un puits de potentiel harmonique. b) Rayon du plus petit minima de l'énergie potentielle définie par l'équation 4.24, en fonction de la pulsation ω du champ magnétique en abscisse et du logarithme du paramètre de mémoire Me . On observe que les trajectoires circulaires observées correspondent aux minima des profils d'énergie potentielle. Pour $Me \rightarrow +\infty$, les minima tendent vers les zéros R_n de la fonction de Bessel J_0 , *i.e* les minima du potentiel ondulatoire définis par l'équation 4.25.

regard de la prédiction théorique des rayons \bar{R} d'orbites possibles en représentant l'ensemble des minima d'énergie potentielle obtenus pour différents paramètres de confinement Λ imposés par le champ magnétique. La figure 4.14 montre finalement un bon accord entre théorie et expérience.

Ce modèle met ainsi en évidence l'influence de la mémoire sur l'apparition d'une quantification. En augmentant la mémoire, le poids relatif du potentiel généré par les ondes devient grand devant les effets de la force centrifuge et de la force centrale. Si le confinement initial a permis de générer un champ d'onde à symétrie circulaire celui ci prend ensuite le relais et impose des tailles d'orbites qui ne dépendent plus du confinement imposé.

Ces valeurs du rayon correspondent à des minima de $E_{\text{ondes}} \propto h$. Les orbites circulaires stables correspondent donc à une condition d'excitation minimale du champ d'onde.

Limites de validité du modèle

Le modèle ci-dessus est basé sur deux simplifications fortes. Tout d'abord, seule la composante J_0 du champ a été conservée, alors que l'amplitude des autres modes n'est pas nécessairement négligeable. Les modes J_k pour $k > 0$ tournent avec la goutte dans son référentiel, et assure sa propulsion. C'est le cas en particulier du mode J_1 . Dans des régimes de mémoire intermédiaire, la contribution de la force radiale exercée par le mode J_1 sur le marcheur n'est également pas négligeable, ce qui modifie légèrement les rayons des orbites d'équilibre. Une analyse plus complète des champs d'onde associés aux trajectoires circulaires est donnée dans la thèse de Matthieu [53].

L'autre approximation forte consiste à considérer des trajectoires dont le rayon est lentement variable. En pratique, les perturbations des cercles comme les épicycles présentent des variations du rayon à des échelles de temps plus courte que le temps de mémoire. Dans ce cas, il est possible de repartir de l'expression du coefficient $h_0(t)$, et d'écrire une perturbation du rayon sous la forme $r = r_0 + \epsilon r_1 e^{\sigma t}$ pour effectuer une analyse de la dynamique dans un puits de potentiel adaptatif. A l'aide de ce type de formalisme, le cas de perturbations non circulaires mais périodiques sera abordé au chapitre 6.

4.4 Conclusion

Le confinement d'un marcheur dans un puits de potentiel central met donc en évidence l'émergence d'un jeu discret de modes propres dans le régime de haute mémoire. Ces modes peuvent être caractérisés par deux observables moyennes que sont le rayon \bar{R} et le moment cinétique \bar{L} , qui prennent des valeurs discrètes. Deux entiers n et m caractérisent ces observables et sont soumis à des règles de sélection qui lient l'extension spatiale et les symétries des modes propres, tel que $n+m$ soit un nombre pair. A ce titre, il est surprenant de trouver une règle de sélection similaire au cas d'une particule quantique dans un puits de potentiel à deux dimensions d'espace, où les nombres n et m désignent le niveau d'énergie et le niveau de moment cinétique.

Pour chaque mode propre de trajectoire correspond un champ d'onde spécifique. La décomposition sur des modes présentant différentes symétries permet de révéler les champs d'ondes associés à ces trajectoires.

Dans la limite de haute mémoire, les trajectoires circulaires sont sélectionnées par une condition dites de non-excitation : Leur orbite est telle que les ondes individuelles générées interfèrent destructivement.

A ce stade, il existe deux voies possibles de poursuite de l'étude. D'une part, le cas des orbites instables présentées en introduction de ce chapitre reste en suspens.

D'autre part, le modèle de couplage entre goutte et ondes a permis de mettre en évidence une règle de sélection des modes propres dans le cas circulaire. L'analyse des trajectoires non circulaires telle que la lemniscate reste très incomplète : par quel mécanisme les courbes de Cassini peuvent elles être sélectionnées ?

Le cas des trajectoires à l'apparence désordonnée sera traité à la suite, au cours du chapitre 5. Un manuscrit restant une oeuvre linéaire, la caractérisation des modes propres non circulaires (Courbes de Cassini) est renvoyée au chapitre 6.

Chapitre 5

Confinement et mémoire de chemin II : Chaos et Probabilités

Les modes propres d'un marcheur confiné sont observés dans des plages restreintes de la raideur du puits de potentiel imposé au marcheur. En dehors de ces plages, les trajectoires observées présentent un caractère erratique, où il devient difficile de mettre en évidence une structure simple. Peut-on caractériser ces trajectoires désordonnées ?

Pour cela, on se propose de partir de la plus petite orbite stable, le mode $n = 1$, et de diminuer la raideur du puits de potentiel pour traverser successivement les premières plages de trajectoires désordonnées. Nous verrons alors comment les trajectoires les plus simples se déstabilisent pour donner naissance à une dynamique chaotique mais déterministe, où la sensibilité aux conditions initiales provoque une perte de prédictibilité à temps long. Pour des trajectoires de plus grande extension spatiale ou obtenues à plus haute mémoire, un déterminisme même chaotique disparaît. En l'absence de déterminisme, nous proposerons alors une description statistique de la dynamique observée.

5.1 Introduction

Pour décrire les trajectoires désordonnées observées, nous allons considérer des cas de complexité croissante. On se propose pour cela d'explorer les régimes de mémoire intermédiaire $Me \approx 50$ où les premières trajectoires désordonnées apparaissent. Ce régime correspond à une longueur de mémoire S_{Me} comparable au périmètre des premières orbites observées (niveau $n = 1$ et $n = 2$). Pour une mémoire donnée ($Me \approx 50$), la figure 5.1 présente le rayon moyen des orbites stables des

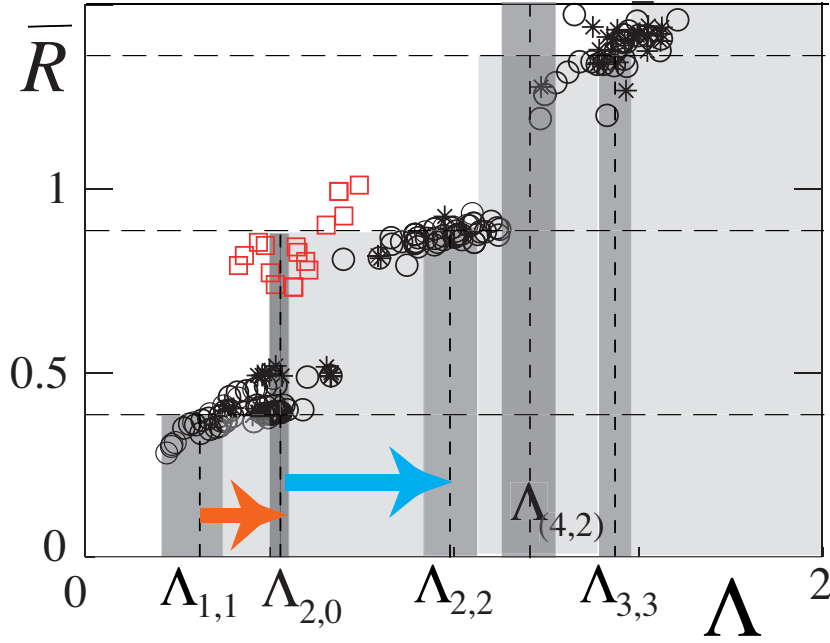


FIGURE 5.1 – **Zones choisies pour l'étude d'un désordre croissant.** Extrait de la figure ?? . Rayon moyen \bar{R} des orbites observées en fonction du paramètre de confinement Λ . Au graphe présentant la quantification du rayon des orbites stables (voir figure 4.4.7b) a été ajouté les plages de stabilité (en gris) de chacun des modes pour une mémoire $Me = 50$. La présence d'orbites stables en dehors de ces plages s'explique par la superposition de points obtenus à des mémoires plus faibles. Entre chacune des plages de stabilité, il existe des zones où aucune orbite stable n'est observée pour $Me > 50$. On se focalisera dans ce chapitre sur l'étude des deux premières plages d'instabilité correspondant à $\Lambda \in [\Lambda_{1,1}, \Lambda_{2,0}]$ (flèche rouge) et $\Lambda \in [\Lambda_{2,0}, \Lambda_{2,2}]$ (flèche bleue).

niveaux $n = 1$ et $n = 2$ en fonction du paramètre de confinement Λ . Les zones de stabilité des modes propres ont été représentées en gris foncé. On observe entre ces zones de stabilité des plages de valeur de Λ pour lesquelles aucune orbite stable n'est observée. Ces zones correspondent à l'observation de trajectoires non périodiques. La première zone d'étude se situe entre la plage de stabilité des cercles $n = 1$ $\Lambda = \Lambda_{1,1}^+$ et le début de la plage de stabilité du mode lemniscate $(n, m) = (2, 0$ pour $\Lambda = \Lambda_{2,0}^-$. La seconde plage est observée pour $\Lambda_{2,0}^+ < \Lambda < \Lambda_{2,2}^-$. La largeur de chacune de ces zones augmente avec la mémoire. Les valeurs limites de stabilité $\Lambda_{n,m}^\pm$ dépendent donc également de la mémoire.

5.2 Recherche de déterminisme dans des trajectoires désordonnées

5.2.1 Premiers signes d'instabilité

Quatre trajectoires expérimentales obtenues pour des valeurs croissantes de Λ sont représentées en figure 5.2, pour $Me = 50$. Au fur et à mesure que le paramètre de confinement Λ est augmenté, les orbites circulaires se déstabilisent donnant lieu à une dynamique de plus en plus erratique. On peut caractériser ce phénomène en examinant l'évolution temporelle du moment cinétique, comme illustré sur la figure 5.2. La trajectoire représentée en figure 5.2b met en évidence un premier retournement du sens de rotation après un temps long devant la période de l'orbite T ($\approx 50T$).

En augmentant le paramètre de confinement Λ , le temps moyen passé selon chaque sens de rotation diminue comme illustré en figure 5.2c. La trajectoire suivie est composée d'une succession de mouvements en épicycle dans un sens de rotation ou l'autre, séparé par des transitions abruptes. La mesure du moment cinétique moyen \bar{L} sur ces phases laminaires est cependant toujours égale à celle des modes propres du premier niveau n , *i.e.* $(n, m) = (1, \pm 1)$. Les zones de moment cinétique moyen $\bar{L} = L_1$ ont été colorées en jaune, tandis que les zones telles que $\bar{L} = L_{-1}$ ont été colorées en vert ¹.

En augmentant encore le paramètre du confinement Λ , la durée moyenne de chaque phase diminue encore. Conjointement, un autre mode propre fait son apparition : la lemniscate de Bernoulli correspondant à $(n, m) = (2, 0)$. Les zones d'observation de la lemniscate ($\bar{L} = 0$) ont été coloriés en rouge sur le signal du moment cinétique instantané L sur la figure 5.2d.

Une succession de zones jaune, rouge et verte de longueurs variables au cours du temps est ainsi observée. La proportion du temps total passé dans ces trois modes propres reste cependant proche de 1, seules de fines bandes échappent à la définition de ces domaines. On parle alors de *multistabilité*, le mouvement du marcheur restant, la majorité du temps, dans le voisinage d'un des modes propres.

Les intervalles de temps passés dans un des modes sont appelés *phases laminaires*, l'évolution du signal y étant lente et régulière. En revanche, les transitions brèves entre modes, incertaines, sont appelées *bouffées chaotiques*.

Il est déjà remarquable d'observer, même dans une dynamique à l'apparence erratique, cette succession temporelle des différents modes propres. Comment varie

1. La détection des différents domaines s'effectue par moyenne du moment cinétique instantané L sur une période du mouvement, avec une tolérance typique de $0.1\lambda_F$ sur la valeur de \bar{L} . Un mode propre de moment cinétique L_m correspond donc à $\bar{L} = L_m \pm 0.1$.

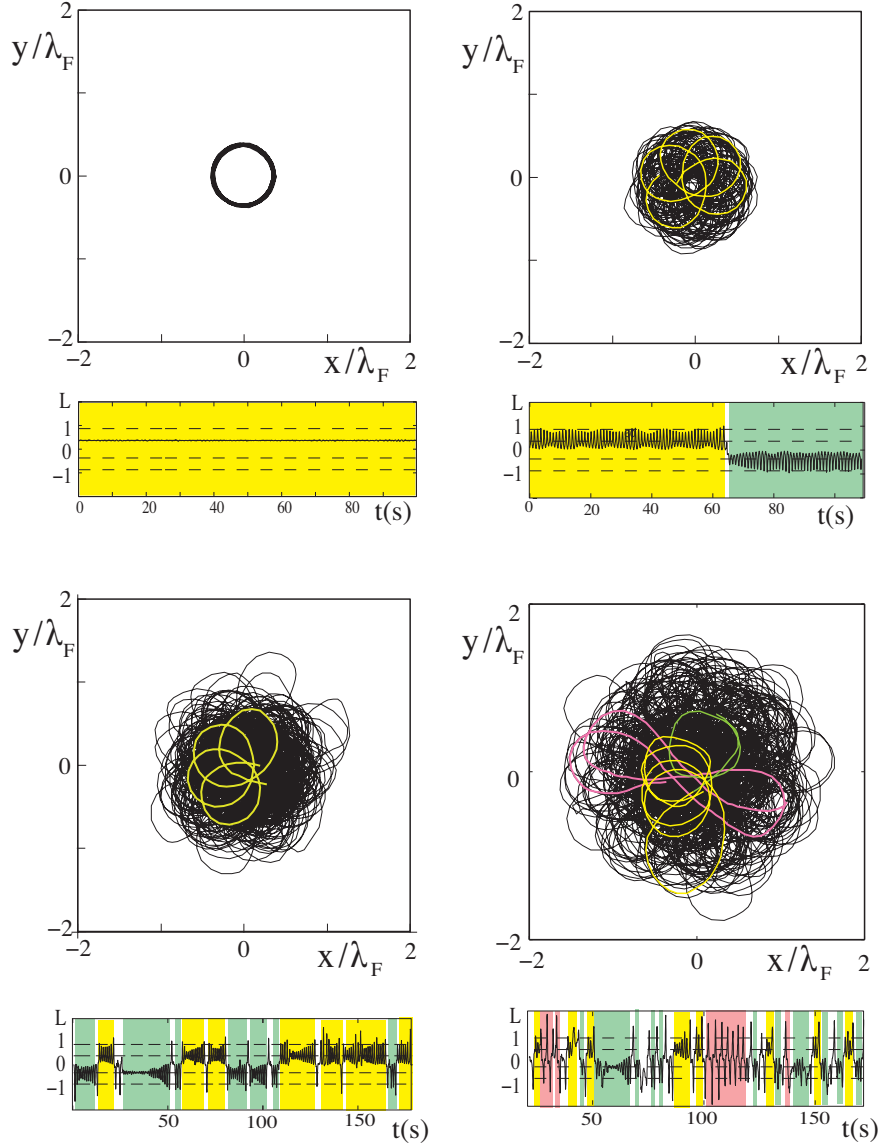


FIGURE 5.2 – **Déstabilisation d'une orbite stable.** Pour un paramètre de mémoire donné $Me = 63$, la valeur du confinement Λ est augmentée depuis une zone d'orbite circulaire $n = 1$ stable ($\Lambda = 0.46$) vers une zone instable. a) $\Lambda = 0.46$. b) $\Lambda = 0.49$. c) $\Lambda = 0.5$. d) $\Lambda = 0.62$. Ces trajectoires ont été obtenues avec une goutte de vitesse $V = 10 \pm 0.5$ mm/s. Les domaines correspondant à des modes différents ont été coloriés en jaune pour le mode $(n, m) = (1, 1)$, en vert pour $(n, m) = (1, -1)$ et en rouge pour $(n, m) = (2, 0)$. Une apparition de comportements *intermittents* est observée.

la proportion de chacun des modes ?

5.2.2 Caractérisation de l'intermittence au niveau $n = 1$

Cette première plage de multistabilité entre plusieurs modes propres est observée pour les orbites circulaires du niveau $n = 1$ ($\bar{R} \approx 0.37$) pour une gamme étroite de confinements Λ située au voisinage de $\Lambda = 0.5$ ². La figure 5.3 présente quelques exemples de signaux temporels du moment cinétique instantané L , obtenus dans ce régime ($Me = 63$, $0.5 < \Lambda < 0.6$). Une succession de trajectoires en épicycle est observée, qui correspondent à des oscillations de L autour d'une valeur moyenne proche de $\bar{L}_{\pm 1} = \pm 0.37$. Les périodes d'épicycles sont entrecoupées de lemniscates sporadiques correspondant à une oscillation de L autour de 0.

Ces enregistrements mettent en évidence des phases laminaires où une perturbation d'amplitude croissante apparaît, provoquant des transitions brutales. Le moment cinétique permet alors de discerner le type de trajectoire suivie, via le signe de L pour le sens de rotation d'une trajectoire circulaire, ainsi que les trajectoires de type lemniscate, qui correspondent à une oscillation du moment cinétique L autour de 0.

5.2.3 Lien avec le chaos dans les systèmes dissipatifs

Cette apparition de désordre à partir d'un cycle limite simple qui se déstabilise peut être observée dans un grand nombre de systèmes physiques à trois dimensions pour une description continue, ou à deux dimensions pour une dynamique discrète [81]. Dans cette route vers le chaos, il existe plusieurs scénarios de transition, chacun d'eux étant associé à des propriétés d'intermittence spécifiques, comme la distribution des temps passés dans les phases laminaires. Ces différentes routes de transition vers le chaos sont résumées dans l'ouvrage de P. Bergé *et al.* [6].

Dans le cas d'un marcheur, le type de signaux observés comme illustré en figure 5.3 présente des similitudes avec les scénarios d'intermittence de type II et III, où la durée des phases laminaires n'est pas bornée, qui a été notamment observée dans une expérience de convection thermique [5]. La période de la perturbation n'est dans le cas présent pas un multiple simple de la période de l'orbite, ce qui correspondrait à une intermittence de type III, d'ailleurs rarement observée expérimentalement [59].

Cependant, ici, l'observation de la trajectoire permet de visualiser la dynamique directement dans l'espace réel. En effet, comme évoqué au chapitre 1, la dynamique

2. Cette plage de multistabilité correspond à une variation de la distance d à l'aimant de moins d'un millimètre, ce qui rend cette expérience difficile à réaliser en pratique.

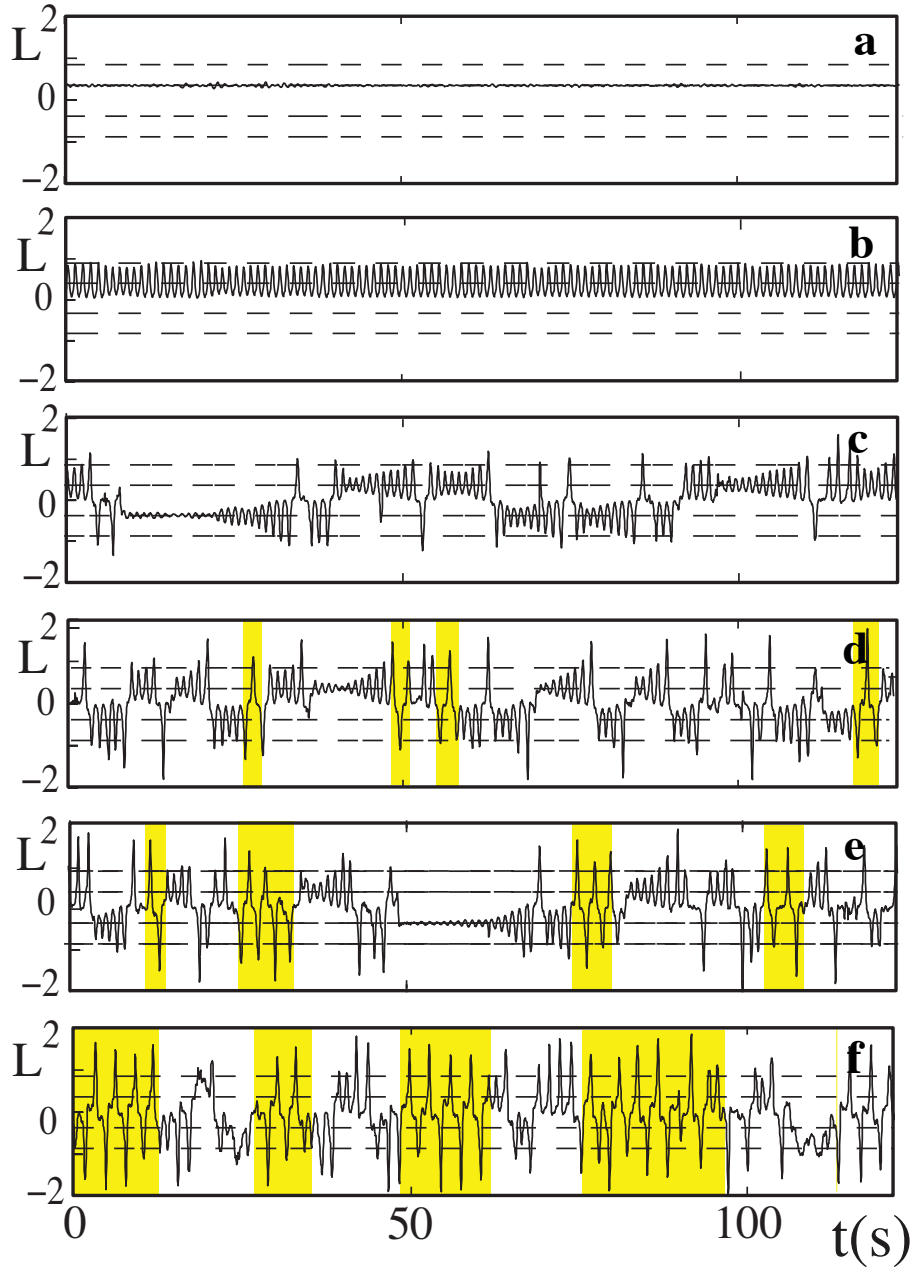


FIGURE 5.3 – **Dynamique intermittente au voisinage du mode $n = 1$.** Enregistrement du moment cinétique L en fonction du temps, pour 6 trajectoires, obtenues pour $Me = 63$ et $\Lambda = 0.49, 0.5, 0.52, 0.53, 0.54$ et 0.55 pour un marcheur de vitesse $V = 10.8$ mm/s. Cette représentation permet de distinguer les trajectoires circulaires de sens de rotation différent (L constant, positif ou négatif), ainsi que les lemniscates (L oscillant autour de 0). Les lignes pointillées correspondent aux moments cinétiques des modes propres $(n, m) = (1, \pm 1)$ et $(n, m) = (2, \pm 2)$. Juste après une transition, on peut remarquer la présence d'oscillations amorties de L qui sont ensuite réamplifiées. L'amplitude diverge alors jusqu'à ce qu'un changement de signe de moment cinétique L se produise.

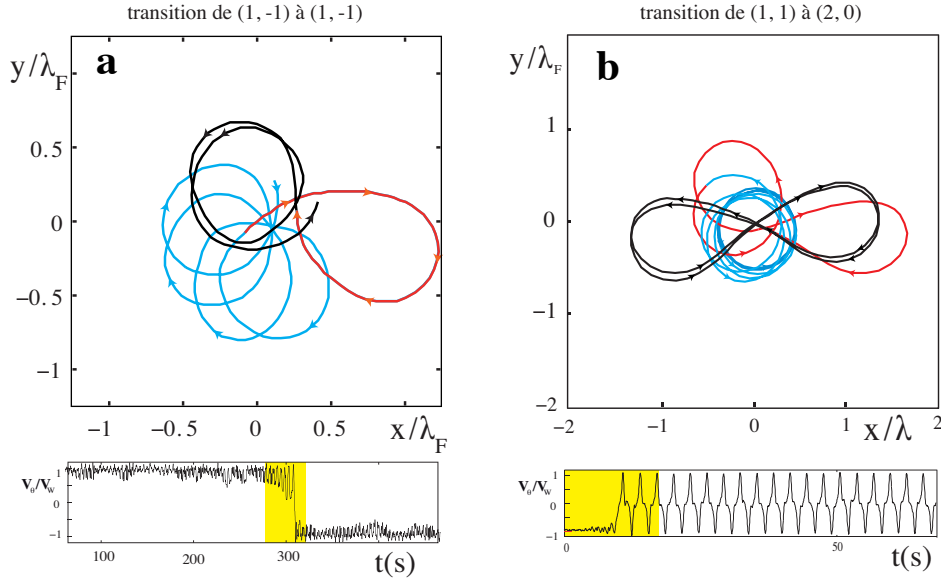


FIGURE 5.4 – **Régimes transitoires entre modes propres au niveau $n = 1$** Trajectoires transitoires, archétype des transitions spontanées observées entre modes propres. Trajectoire antérieure (bleue), pendant la transition (rouge), et après transition (noir). a) Orbites circulaires $n = 1$ obtenues pour $Me = 48$, $\Lambda = 0.45$ et $V = 5.2$ mm/s. L'apparition d'une boucle de lemniscate médie le passage d'une orbite circulaire $m = 1$ à une orbite $m = -1$. b) Transition provoquée par un changement de valeur de $\Lambda = 0.55 \rightarrow 0.6$ pour $Me = 32$ et $V = 10.2$ mm/s.

d'un marcheur peut être décrite comme une suite de positions successives, reliées entre elles par la *mémoire de chemin*. Cette cohérence temporelle présente l'avantage de pouvoir représenter, sans pertes d'information, la dynamique dans un espace à deux dimensions. Cette propriété peut par exemple être exploitée pour visualiser dans l'espace réel les scénarios de transition entre les modes propres.

La figure 5.4 présente deux exemples de transition entre modes, correspondant à une transition $(1, 1) \rightarrow (2, 0)$ (figure 5.4a) et une transition $(2, 0) \rightarrow (1, 1)$ (figure 5.4b). Pour chacune de ces deux trajectoires, un signal temporel caractéristique a été représenté (ici V_θ/V , où V_θ est la vitesse azimutale). On observe que la transition entre modes est provoquée par un décalage de la trajectoire au voisinage du centre. Par exemple lors d'une succession de cercles au niveau $n = 1$, l'enroulement de la trajectoire peut provoquer un passage par le centre. Il apparaît alors une boucle de lemniscate qui médie une transition soit vers une nouvelle orbite circulaire de sens opposé, soit vers une stabilisation temporaire de lemniscate. Une visualisation directe des trajectoires montre que les transitions présentent toujours ces mêmes archétypes. L'évolution de la dynamique est ainsi dictée par l'apparition, plus ou moins fréquente, de ces transitions déterministes.

Les occurrences de ces transitions déterministes sont-elles aléatoires, ou au contraire déterministes ?

5.2.4 Recherche de déterminisme : application de premier retour

Pour répondre à ce type de question la boîte à outils de l'étude des systèmes dynamiques est bien fournie [1]. On se propose d'utiliser l'un d'entre eux : l'application de premier retour. Pour un système quasi périodique, la description de la dynamique par une observable continue X peut être réduite à l'évolution de X sur une période T [40]. On définit pour cela une variable discrète X_k , et on cherche à exprimer X_{k+1} , la valeur de l'observable X une période plus tard, en fonction de la valeur X_k .

Une des difficultés expérimentales réside dans le choix de la durée T entre deux instants successifs k et $k + 1$, pour pouvoir décrire l'évolution du système à temps long. La période T est usuellement choisie égale à la période du mouvement rapide, en prenant une phase arbitraire du mouvement pour définir les X_k . Pour un enregistrement expérimental réel, le choix d'un extremum local de la distance au centre X pour X_k s'avère bien plus robuste [1]. La durée T n'est donc pas constante, mais autodéterminée par la durée écoulée entre deux extrema. L'observable X est ainsi décrite par une suite de valeurs $\{X_k\}$, non nécessairement espacées régulièrement en temps, mais représentant chacun un extremum successif de l'observable X . On cherche ensuite à décrire cette évolution de manière déterministe, *i.e.* en cherchant une fonction G permettant de relier la valeur X_{k+1} à X_k sous la forme :

$$X_{k+1} = G(X_k) \tag{5.1}$$

G , si elle existe, est appelée application de premier retour. Elle permet de décrire l'évolution du système sur une durée T donnée. Tout le jeu revient donc, par un choix judicieux de la variable X , à mettre en évidence expérimentalement une application G non multivaluée qui décrit l'évolution de la dynamique.

Cette recherche de déterminisme dans des signaux à l'apparence erratique est une des idées fondatrices de l'étude du chaos dans les années 70 [29]. La première étude moderne du chaos basée sur l'application de premier retour a été menée sur un système modèle de convection thermique par Lorenz, qui remarqua un désordre apparent dans une dynamique de basse dimension [58].

A la recherche d'un déterminisme dans la dynamique erratique observée, une application de premier retour expérimentale a été mesurée sur une trajectoire obtenue pour $Me = 63$ et $\Lambda = 0.7$, comme illustré en figure 5.5. L'application présente trois points fixes notés $M_{1,\pm 1}$, $M_{2,0}$ et $M_{3,\pm 1}$. La pente de G en chacun de ces points est

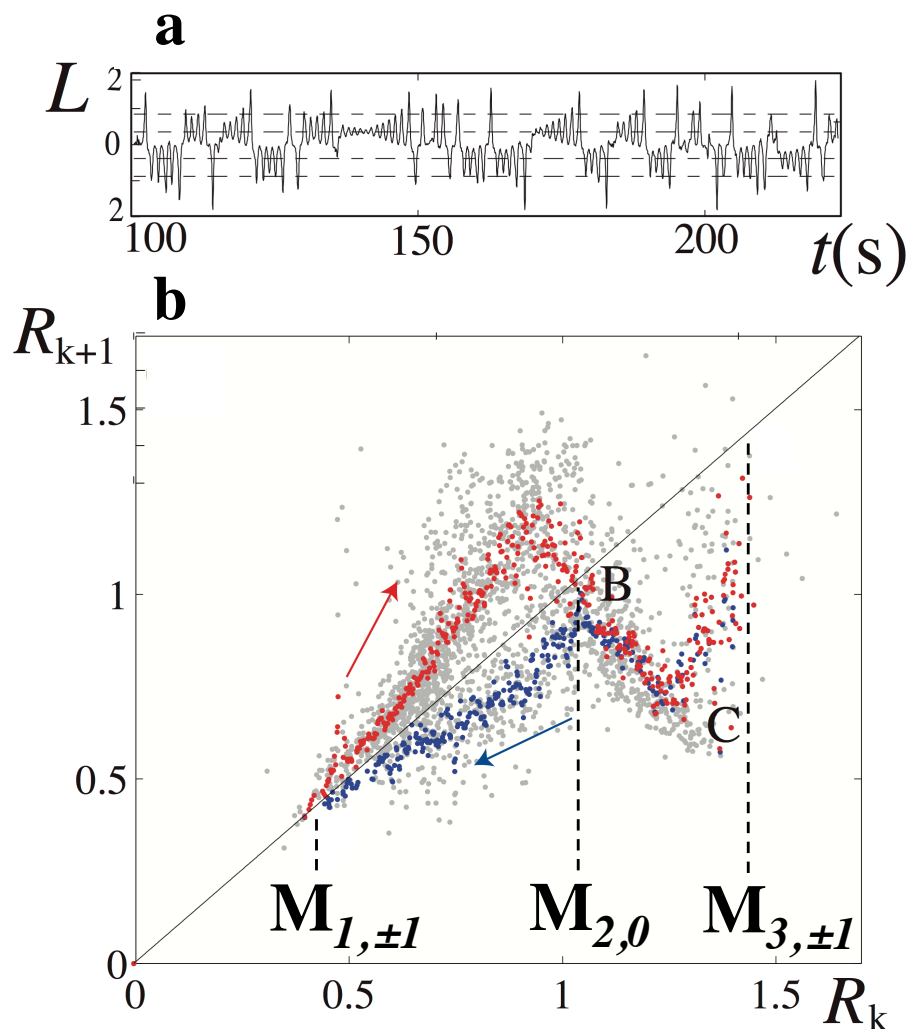


FIGURE 5.5 – **Application de premier retour multivaluée.** a) Enregistrement du moment cinétique L en fonction du temps. On observe une succession de régimes d'épicycles quasi circulaires (L constant) d'amplitude lentement croissante, entrecoupés de changement de signe du moment cinétique L . b) Application de premier retour associée à l'évolution du rayon R de l'orbite au cours du temps. R_k correspond au $k^{\text{ème}}$ maximum du rayon. Le maximum suivant R_{k+1} peut alors être représenté en fonction du précédent R_k . L'ensemble des points met en évidence une application de premier retour $R_{k+1} = G(R_k)$ permettant de suivre l'évolution temporelle de la trajectoire suivie par le marcheur. L'apparition de deux branches, l'une pour $R_{k+1} > R_k$ (rouge) et l'autre pour $R_{k+1} < R_k$ pose tout de même un problème de définition de G , qui devient alors *multivaluée*.

supérieure à 1 en module, révélant que ces trois points fixes sont instables. Entre les points fixes apparaît un nuage de points dont se dégage deux branches principales. L'une située au dessus de la première bissectrice, et l'autre au dessous. La branche rouge a été obtenue par moyenne d'ensemble sur une tranche de valeur de R_k de largeur $dR = 0.01\lambda_F$ avec $R_{k+1} > R_k$, tandis que la branche bleue est issu du même procédé de moyenne, mais en retenant uniquement les points tels que $R_{k+1} < R_k$. Ces deux branches sont confondues en $M_{1,\pm 1}$, bifurquent, puis se rejoignent en C.

Au voisinage de $M_{1,\pm 1}$, les trajectoires correspondent à des trajectoires en épi-cycles proche des niveaux $(n, m) = (1, \pm 1)$, dont l'amplitude d'oscillation de la distance au centre r croît au fur et à mesure de l'éloignement du point fixe.

Au voisinage de $M_{2,0}$, il s'agit de boucles de lemniscate, dont la longueur varie au cours du temps. Cette portion de l'application de premier retour est analogue au cas de la perte de stabilité d'une lemniscate pure de la figure 5.5.

Au voisinage de $M_{3,\pm 1}$, les trajectoires correspondent à des boucles de grande extension spatiale. Bien que fortement instable, l'existence de ce troisième point fixe $M_{3,\pm 1}$ est une signature du mode $(3, \pm 1)$.

L'existence de ces points fixes de l'application G qui correspondent respectivement aux orbites $(1, \pm 1)(M_{1,\pm 1})$, à la lemniscate de Bernoulli $(2, 0)(M_{2,0})$ et aux grandes boucles $(3, \pm 1)(M_{3,\pm 1})$ valident ainsi, par une étude dynamique, l'appellation de modes propres de la dynamique introduite au chapitre précédent.

La branche rouge de cette application correspond à une évolution déterministe, proche de celle obtenu pour un attracteur de Lorenz [58], ou un attracteur de Rossler [78]. Cependant, la pente élevée de G au voisinage de son maximum produit une évolution hypersensible aux conditions initiales. Le pouvoir de prédictibilité d'une telle application sera donc perdu après un temps fini.

L'apparition d'une seconde branche reliant $M_{2,0}$ à $M_{1,\pm 1}$ met à mal ce déterminisme. Cela signifie que pour une valeur de R_k comprise entre 0.4 et 1.2, deux valeurs possibles de R_{k+1} peuvent être associées. Ainsi, l'application de premier retour G ne peut plus être définie de manière univoque, et le déterminisme est nécessairement perdu : la seule connaissance de la valeur de R_k à un instant donné n'est pas suffisante pour décrire l'évolution du système. Pour garder une description déterministe de la dynamique, il faut donc ajouter une autre observable permettant de distinguer les deux branches de cette application. Ceci peut être fait de manière naïve en traçant en rouge le chemin des points tel que $R_k > R_{k-1}$ et en bleu tel que $R_k < R_{k-1}$. Ainsi, la branche supérieure (rouge) correspond à une amplitude d'oscillation croissante de l'orbite, tandis que l'autre branche (bleu) correspond à une amplitude décroissante. Cet indéterminisme peut donc être levé en représentant dans un graphe à 3 dimensions la valeur de R_{k+1} en fonction de R_k et R_{k-1} . Dans cette représentation, il y aura donc deux feuillets qui s'intersectent en $M_{1,\pm 1}$. Le

passage d'une branche à l'autre s'effectue alors soit dans le voisinage de $M_{1,\pm 1}$, soit entre $M_{2,0}$ et C .

Cette représentation naïve en fonction des deux valeurs précédentes R_k et R_{k-1} ne correspond cependant pas strictement à une application de premier retour, puisque la valeur antérieure R_{k-1} introduit des corrélations temporelles dans l'évolution du système. Pour construire une nouvelle application de premier retour, il faut ajouter une observable Y_k discrétisée, calculée au même instant k , et suivre l'évolution du nouveau vecteur de coordonnées (X_k, Y_k) au cours du temps. Ni la position angulaire θ_k par rapport au centre de la goutte, ni la direction de la vitesse suivie par le marcheur ne s'avère pertinente pour rationaliser cette application. Pour garder une description de l'état $k+1$ en fonction de l'état k uniquement, il faut donc invoquer une variable qui ne dépend ni de la position ni de la vitesse de la goutte.

Une manière de lever l'indétermination est de choisir pour Y_k une information caractéristique du champ d'onde entourant la goutte, comme l'amplitude A^0 du mode J_0 centré. La valeur de A^0 est liée au potentiel ondulatoire E_{ondes} généré par les ondes le long du chemin suivi (voir chapitre 4). Pour une trajectoire issue de la déstabilisation d'une orbite circulaire, le mode centré a été préalablement construit, et l'amplitude A^0 sera donc significative. Pour une trajectoire provenant d'une orbite en lemniscate, l'amplitude des modes J_0 centré est plus faible.

Ainsi, ce type d'application de premier retour met en évidence l'apparition d'une dimension supplémentaire pertinente dans la dynamique. L'évolution de la trajectoire devient alors dépendante à la fois de la position instantanée de la goutte, mais aussi à la valeur du champ d'onde qui l'entoure. L'évolution de la trajectoire du marcheur, bien qu'elle soit toujours déterministe, devient donc dépendante d'une variable de champ : la dynamique du marcheur ne peut plus être réduite à celle d'un point matériel, quel que soit le type de force locale invoquée.

Pour revenir au mouvement d'un point matériel à deux dimensions d'espace, il faut donc accepter d'introduire des corrélations en temps dans l'application de premier retour.

Finalement, il existe donc deux manières de rationaliser cette application de premier retour. La première solution consiste à construire une application de premier retour standard $G(R_k, A_k^0)$ fonction de deux variables R_k et A_k^0 . Celle-ci fait néanmoins apparaître un terme de champ pour le mouvement d'un objet ponctuel, *i.e.* un couplage avec le champ spatialement étendu qui l'entoure. La seconde solution consiste à garder une application G associée à un point matériel, fonction de deux variables R_k et R_{k-1} . Il s'agit alors bien du mouvement d'une particule ponctuelle, mais dont la dynamique est corrélée en temps. Il y a donc ici la signature d'un *effet de mémoire* sur les trajectoires suivies, à l'échelle de la période du mouvement horizontal, de l'ordre de la centaine de périodes verticales.

A ma connaissance, ce type d'application de premier retour ne peut être obtenu pour le mouvement d'un point matériel à deux dimensions, sans invoquer de couplage avec l'environnement. Ici, les propriétés particulières qui en découlent proviennent de l'influence prépondérante de l'onde sur la dynamique de la goutte.

Cette application de premier retour montre également une hypersensibilité aux conditions initiales. En effet, un écart même minime entre deux trajectoires sera amplifié au cours du temps, et finira par diverger. Le pouvoir de prédiction d'une telle dynamique est donc limité à un temps fini de l'ordre d'une vingtaine de périodes du mouvement. On parle alors de régime de *chaos déterministe*, ou d'*intermittence* entre phases laminaires et bouffées chaotiques.

5.2.5 Intermittence d'un mode unique : la lemniscate

Dans la plage d'intermittence du niveau $n = 1$, au fur et à mesure que le paramètre de confinement Λ est augmenté, la proportion d'orbites circulaires diminue pour laisser place à des trajectoires de type lemniscate. Juste à la limite de disparition des orbites circulaires, les lemniscates observées présentent une précession erratique au cours du temps, et des variations de la taille individuelle des boucles, comme le montre la figure 5.6a. Le signal associé du moment cinétique L au cours du temps met en évidence des phases laminaires de lemniscates entrecoupées de grandes boucles, et de quelques trajectoires circulaires sporadiques. Il apparaît parfois deux boucles de même sens de rotation à la suite, pour lesquelles le moment cinétique moyen vaut $\bar{L} \approx 0.4$, et est donc proche du niveau $m = 1$. Cette succession de boucles de même sens ne correspond cependant pas à un point fixe, on parlera de *défauts* localisés.

De manière analogue au cas d'intermittence entre cercles du niveau $n = 1$, la figure 5.6b présente une mesure de l'application de premier retour G de la trajectoire en lemniscate ci-contre. La variable choisie reste la distance au centre R . Les positions R_{k+1} sont donc repérées en fonction de R_k , où R_k désigne le maximum de R sur la k -ème période du mouvement horizontal. Chaque point noir correspond à l'évolution du signal sur une période. L'ensemble des points R_k compris entre $R - dR$ et $R + dR$ avec $dR = 0.005\lambda_F$ ont été moyennés, pour obtenir une application de premier retour moyenne G_{exp} (cercles rouges).

Cette représentation révèle là encore une relation déterministe entre la position du maxima R_{k+1} en fonction du précédent R_k . L'application G_{exp} ainsi définie ne présente cependant qu'une seule branche, signe d'une dynamique de plus faible dimension. Cette application met encore en évidence un point fixe $R_{k+1} = R_k$ au voisinage de $M_{2,0} = 1.15$. La pente de G en $M_{2,0}$ est toujours supérieure à 1 en module, avec $G'(M_{2,0}) < -1$. Ce point fixe est donc instable, et la position des

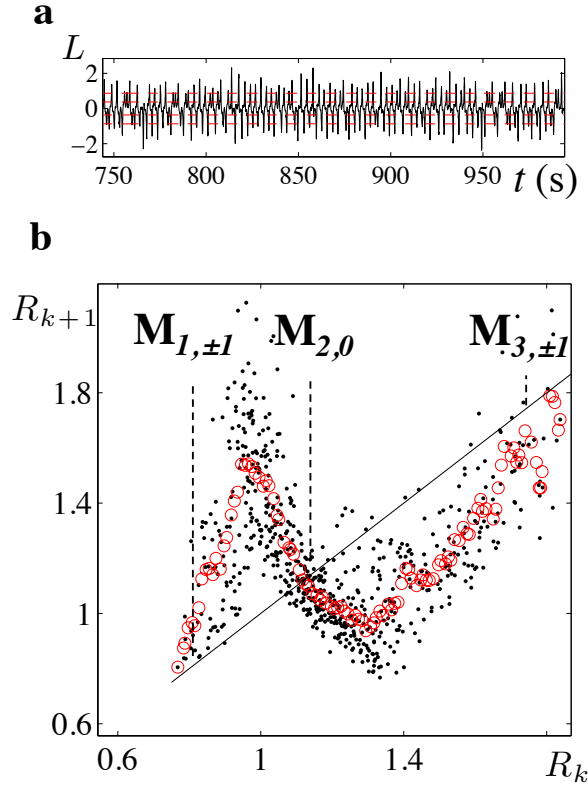


FIGURE 5.6 – **Perte de stabilité d'un mode unique : la lemniscate.** a) Trajectoire de type lemniscate observée pour $Me = 100$, $\Lambda = 0.57$ et $V = 8.6$ mm/s. La taille et l'orientation des boucles varient dans le temps, de manière erratique. b) Application de premier retour régissant l'évolution de la distance maximale R_{k+1} au centre en fonction de R_k . Réalisations individuelles (points noirs), et moyenne d'ensemble par tranche de valeurs de R_k (\circ). La droite $R_{k+1} = R_k$ a été superposée en noir. Le point fixe $R_k = R_{k+1} = 1.15\lambda_F$ correspond à des trajectoires en lemniscate. Ce point étant instable, on observe une évolution de la taille des boucles suivant l'application G ainsi définie.

maxima R_k va varier autour de cette valeur. Il est d'ailleurs encore possible de deviner l'existence des deux autres points fixes $M_{1,\pm 1}$ et $M_{3,\pm 1}$, dont la pente est bien supérieure à 1. Ces points fixes correspondent aux modes $(1, \pm 1)$ et $(3, \pm 1)$ définis au chapitre 4. Pour cette valeur donnée du paramètre de confinement Λ , ils sont cependant très instables (pente de G bien supérieure à 1 en modul), et donc d'une relevance statistique faible.

Ces deux parties de l'application de premier retour correspondant à des trajectoires très instables réinjecte la solution dans le voisinage de R_B , mais de manière hypersensible à la condition initiale. Il en résulte un signal à l'apparence erratique, où les boucles de lemniscates sont d'extensions variables. Une application de premier retour sur la position angulaire θ_k met, en évidence une forte anticorrélation entre

θ_k et θ_{k+1} , signature d'une succession de boucles diamétralement opposée, autre caractéristique de la lemniscate.

En dépit de la complexité apparente de la trajectoire expérimentale représentée en figure 5.6a, il est possible de prédire l'évolution du système par une approche déterministe, grâce à l'application de premier retour. Due à l'absence de point fixe stable, la trajectoire ne convergera pas vers une orbite périodique. Cependant, le point fixe correspondant à la lemniscate étant seulement légèrement instable, la majeure partie du temps sera passé au voisinage de celui-ci. Sur une période, le moment cinétique \bar{L} reste d'ailleurs quasi nul. Il y a donc persistance, même dans un régime chaotique, du mode propre voisin.

5.2.6 Remarques sur le nombre de degré de liberté

La dynamique de ces trajectoires désordonnées devrait présenter, *a priori*, un grand nombre de degré de liberté. Elle comprend en effet, outre la goutte, l'ensemble des degrés de liberté du champ d'onde généré par un nombre Me de sources actives. Le couplage de la goutte à un champ d'onde ajoute donc environ Me dimensions à la dynamique d'un marcheur. Deux arguments permettent tout de même de justifier l'apparition d'une dynamique pilotée par un petit nombre de degré de liberté, basés sur la décomposition en modes de Bessel centré (voire chapitre 4. conséquences du théorème de Graf) :

- Dans la décomposition en modes, seules les composantes du champ présentant la même symétrie que les trajectoires suivies ont une influence significative sur la dynamique, comme nous l'avons vu au chapitre 4.
- Dans le cas de trajectoires bornées, seuls les premiers modes J_k contribuent significativement à la force exercée là où se trouve le marcheur. En effet, la fonction de Bessel J_k d'ordre k est quasi nulle au voisinage du centre, jusqu'à une distance qui croît avec l'ordre k de la fonction de Bessel considérée.

Finalement, le champ d'onde associé à la trajectoire devrait pouvoir être décrit par un nombre très limité de modes. Les degrés de liberté pertinents du champ d'onde seront typiquement l'amplitude du mode centré J_0 , et l'orientation angulaire et l'amplitude des modes pairs suivants, J_2 (+2) voire J_4 (+2). Si on ajoute ces degrés de liberté à ceux de la goutte, dont la dynamique est gouvernée par une équation du second ordre en dimension 2 (2×2) avec une contrainte sur la norme de la vitesse ($2 \times 2 - 1 = 3$), on dénombre donc déjà $3 + 3 = 6$ voire $3 + 5 = 8$ degrés de liberté, jouant *a priori* un rôle pertinent dans la dynamique.

Malgré un nombre de degrés de liberté légèrement élevé pour l'étude du chaos de basse dimension [1], cette approche s'avère pertinente pour décrire la dynamique d'un marcheur, dans un régime de mémoire intermédiaire $Me \approx 50$, et pour l'in-

termittence au niveau $n = 1$. Cette simplicité de la dynamique révèle que seul un nombre faible de dimensions est pertinent pour décrire l'évolution temporelle de la dynamique. A fortiori, le nombre de modes de champ pertinent reste faible, au moins pour des trajectoires de faible extension spatiale. Cet aspect sera exploité au chapitre 6 pour décrire la force exercée par les ondes par un nombre faible de modes de champ.

5.2.7 Intermittence à un niveau supérieur ($n=2$)

La plage suivante d'intermittence est observée pour $0.65 < \Lambda < 0.8$, et met en jeu les 3 modes du niveau $n = 2$ que sont les cercles ($m = \pm 2$) et la lemniscate ($m = 0$). La figure 5.7 présente quatre exemples de trajectoires obtenues dans ce régime pour une mémoire $Me = 50$. L'observation directe des trajectoires met là encore en évidence l'apparition des différents modes propres, que sont les cercles et la lemniscate. Les enregistrements du moment cinétique L présentés en figure 5.7 révèlent que le temps passé dans chacun des états peut être très grand devant la période d'une orbite. Cependant, au contraire du précédent cas d'intermittence, il ne semble pas y avoir de croissance lente d'une perturbation, mais plus une succession de longues phases laminaires entrecoupées de transitions brèves.

Des applications de premier retour ont été effectuées sur ce type de signaux à partir de la distance au centre R , de l'orientation θ , du moment cinétique L et de l'amplitude des premiers modes de champs. Aucune de ces représentations n'a révélé d'application de premier retour, mais seulement une accumulation de points expérimentaux au voisinage des différents points fixes. Il ne semble plus possible, avec un nombre de degrés de liberté raisonnable, de mettre en évidence une évolution déterministe, même chaotique.

Cette impossibilité de décrire la dynamique de manière déterministe par une application de premier retour peut être imputée à plusieurs origines. Tout d'abord, le nombre de dimensions pertinentes mis en jeu augmente vraisemblablement avec l'extension des trajectoires. En effet le nombre de modes de champ non nul est plus important, il faut alors pouvoir représenter une application de premier retour à plus de trois dimensions, qu'il est difficile de mettre en évidence dans un signal expérimental réel. Cette augmentation de la dimension effective du système peut masquer le déterminisme, une limite qui a de nombreuses fois été mentionnée pour l'étude des systèmes dynamiques par une approche déterministe [59].

Malgré la perte de déterminisme apparent, la dynamique peut toujours être observée dans l'espace réel, sans perte d'information, via la trajectoire suivie. Cette propriété remarquable du marcheur peut là encore être utilisée pour visualiser les régimes transitoires suivis lors du passage d'un mode à l'autre. La figure 5.8 pré-

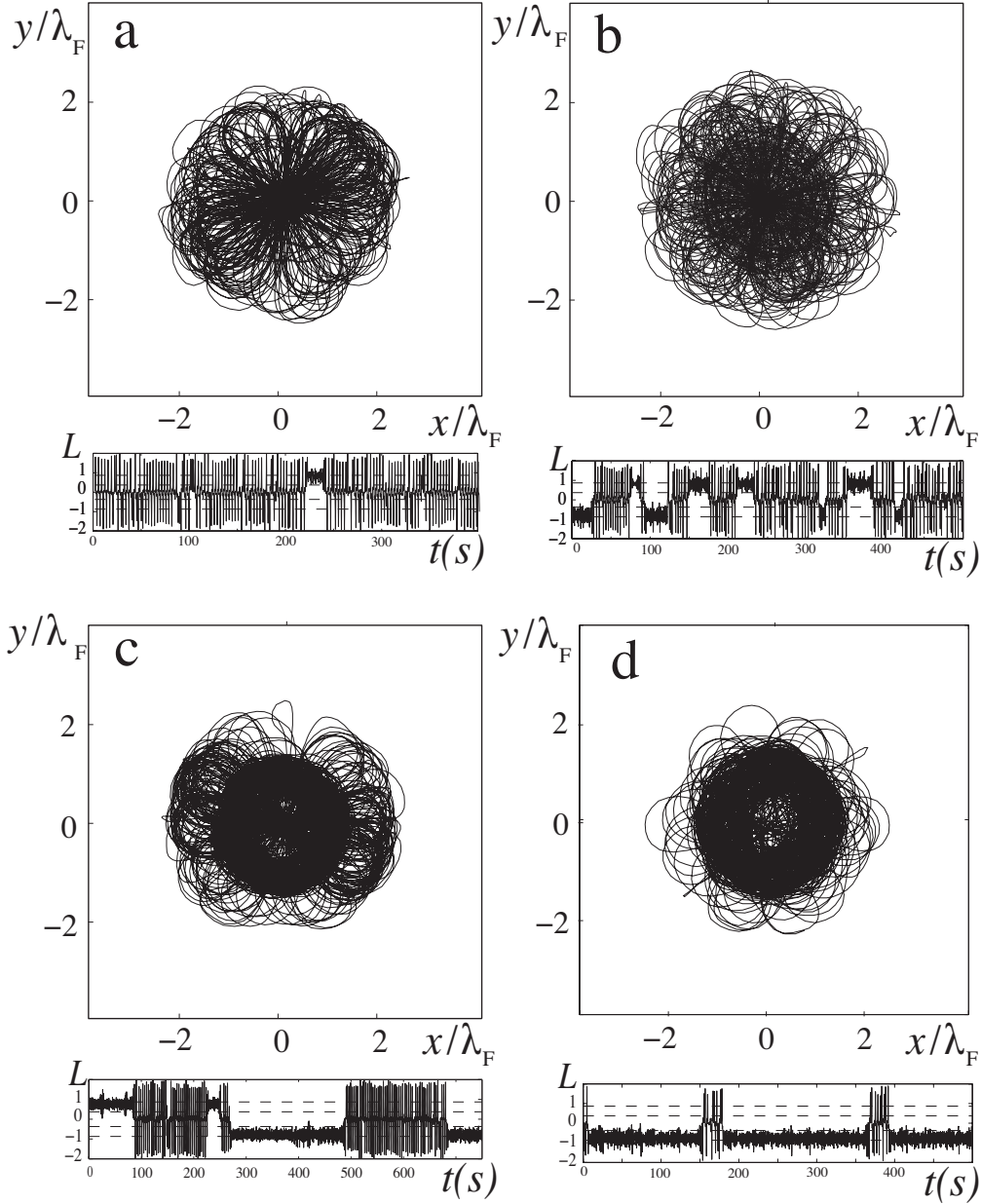


FIGURE 5.7 – **Trajectoires intermittentes au niveau $n = 2$.** Trajectoires expérimentales obtenues dans la plage de confinement $0.73 < \Lambda < 0.77$ située entre les niveaux $(n, m) = (2, 0)$ et $(n, m) = (2, \pm 2)$, pour $Me = 38$ et $V = 11.5 \pm 0.3$ mm/s. A chaque trajectoire a été associée l'enregistrement du moment cinétique L au cours du temps. On observe une intermittence entre les deux types d'orbites stables (cercles et lemniscate), entrecoupée de brefs régimes transitoires.

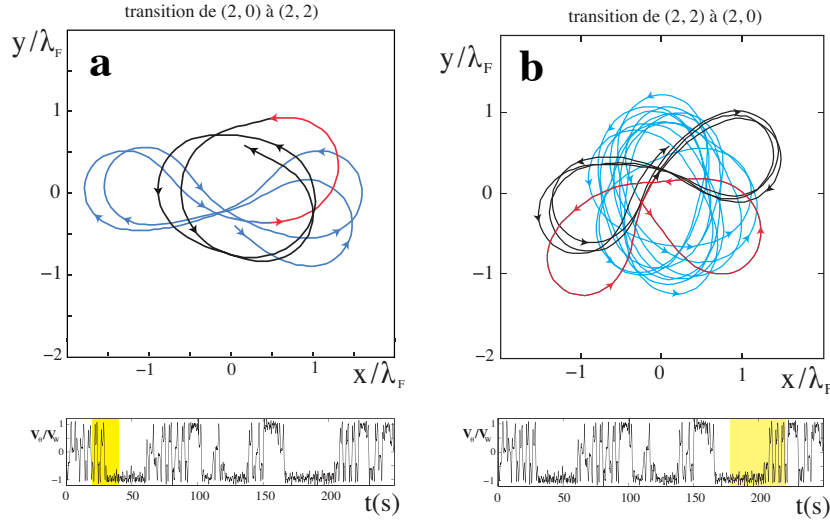


FIGURE 5.8 – **Régimes transitoires entre modes propres du niveau $n = 2$.** Trajectoires transitoires, archétype des transitions spontanées observées entre niveaux. Trajectoire antérieure (bleue), pendant la transition (rouge), et après transition (noir). a) Transition d'une orbite $(n, m) = (2, 0)$ vers une orbite $(2, 2)$, par décalage de la lemniscate par rapport au centre, $Me = 25$, $\Lambda = 0.62$ et $V = 7.8$ mm/s. b) Transition d'une orbite $(n, m) = (2, 2)$ vers une orbite $(2, 0)$, par décalage de l'ovale par rapport au centre, $Me = 25$, $\Lambda = 0.62$ et $V = 7.8$ mm/s.

sente deux transitions entre modes, correspondant respectivement à $(2, 0) \rightarrow (2, 2)$ et $(2, 2) \rightarrow (2, 0)$.

Il s'agit en fait d'archétypes : l'ensemble des transitions suivent le même scénario de passage de l'autre côté du centre que dans le cas de l'intermittence $n = 1$. Pour la transition $(2, 0) \rightarrow (2, 2)$, une précession de grande amplitude de la lemniscate sur une période du mouvement produit une boucle de rayon de courbure plus élevé, qui s'enroule autour du centre. Le marcheur ne repassant pas au voisinage du centre au cycle suivant, il se retrouve piégé sur une orbite circulaire. De même, pour une transition $(2, 2) \rightarrow (2, 0)$, un décalage de l'orbite par rapport au centre provoque une boucle excentrée, et un passage dans le voisinage du centre. Suite à cette boucle successive de même sens, la trajectoire converge vers une lemniscate.

Le déclenchement de ces scénario de transition ne semble en revanche pas déterministe, puisqu'aucune application de premier retour n'a pu être mise en évidence. Ce type de dynamique rappelle une autre classe de phénomène présentant aussi un nombre effectif faible de dimensions, mais couplé à un bruit extérieur. C'est le cas par exemple des retournements du champ magnétique terrestre, où le champ \vec{B} est soumis à un bruit dit *multiplicatif*, par couplage avec l'écoulement turbulent [85, 36]. Suivant le type de points fixes stables et instables mis en jeu, il peut aussi s'agir

d'intermittence ON/OFF [72, 45].

La comparaison entre dynamique d'un marcheur et champ magnétique terrestre n'est peut être pas fortuite. Dans le cas d'un marcheur, plusieurs points peuvent rappeler le cas d'un retournement bref du champ magnétique :

- Le nombre effectif de dimensions mis en jeu reste faible : la dynamique du vecteur position \vec{r} peut être décrite dans un espace des phases de dimension réduite (trajectoire + premiers modes du champ d'onde).
- Les régimes de transitoires observés sont reproductibles.
- Il existe une source de bruit multiplicatif : la principale source de bruit à haute mémoire provient d'une composante fluctuante de la force exercée par les ondes sur la goutte. Celle ci provient du couplage avec le champ d'onde, dont les amplitudes individuelles peuvent fluctuer en raison d'une mauvaise synchronisation du rebond, ou la génération d'une onde d'amplitude moindre.

Le bruit expérimental observé semble augmenter avec le paramètre de mémoire, de sorte que la dynamique devient de plus en plus erratique lorsque Me croît. Ce phénomène peut être illustré comme une accumulation de bruit.

En effet, si l'on considère que l'amplitude A_0 de chaque onde fluctue d'une valeur $\epsilon_k \ll 1$ autour de sa valeur moyenne, la fluctuation de la force totale résultante sera donnée par :

$$\vec{F}_{\text{ondes}} = \vec{\nabla} \sum_{k=1}^{+\infty} A_0(1 + \epsilon_k) J_0(k_F ||\vec{\rho} - \vec{r}_k||) e^{-k/Me} \quad (5.2)$$

En considérant les ϵ_k comme des variables aléatoires indépendantes, le terme fluctuant δF_{ondes} sera de l'ordre de :

$$\delta F_{\text{ondes}} \approx \epsilon \sqrt{Me} F_{\text{ondes}} \quad (5.3)$$

Il s'agit cependant d'une évaluation très grossière, la modification des positions r_k des impacts sous l'influence du bruit ϵ_k augmentera encore les fluctuations de ce terme de mémoire.

Ces divers ingrédients amèneraient à penser que la dynamique multistable observée dans le régime $n = 2$ pourrait être analogue à des cas de multistabilité pilotée par un bruit multiplicatif. Le type d'analogie dépendra alors de la structure des points fixes stables et instables dans l'espace des phases du marcheur. Pour la multistabilité au niveau $n = 2$, l'existence de deux modes de même symétrie, dont les transitions sont médiées par un mode plus instable de symétrie différente rappelle le retournement du champ magnétique terrestre [68].

5.3 Description statistique et superposition d'états

Une description en terme de dynamique déterministe n'étant plus accessible, on choisit de se rabattre sur une analyse statistique des orbites observées.

5.3.1 Une persistance des états propres dans une dynamique intermittente

Pour un niveau d'extension spatiale donné, chaque mode propre peut être mis en évidence par le moment cinétique moyen \bar{L} , calculé sur une période du mouvement. La figure 5.9a présente deux histogrammes obtenus pour la trajectoire de la figure 5.7b. La difficulté réside dans le choix du temps de moyenne Δt du moment cinétique. Pour observer la signature de modes de période différentes (cercles $n = 2$ et lemniscate), deux histogrammes ont été calculés. L'un a été obtenu par une moyenne du moment cinétique instantané L sur le temps de parcours d'une orbite élémentaire, soit $T = 1.3$ s (bleu), l'autre a été obtenu par moyenne sur le temps de parcours de la lemniscate $(n, m) = (2, 0)$, $T = 3.3$ s (rouge).

Le premier histogramme (bleu) met en évidence un pic au voisinage de $\bar{L} = 0.87$, qui correspond à des trajectoires de type cercles $n = 2$. La présence d'un second pic au voisinage de $\bar{R} = 0.37$ est un artefact, qui correspond à la signature du moment cinétique associé à une boucle individuelle de lemniscate.

Le second histogramme (rouge) met également en évidence les orbites $n = 2$, mais aussi les lemniscates dont le moment cinétique moyen est nul pour un temps de moyenne égale à la période de l'orbite. Le pic secondaire au voisinage de $\bar{R} \approx 0.37$ disparaît naturellement, en l'absence d'orbites circulaires du niveau $n = 1$.

Une première analyse basée sur cette histogramme de moment cinétique L_z met donc en évidence la pertinence statistique de chacun des modes propres pour des valeurs du confinement Λ variées.

Une des difficultés de l'interprétation des histogrammes à une dimension provient de la sensibilité du résultat au choix de la durée de moyenne Δt . Une manière de palier à cette difficulté est d'effectuer des histogrammes de moment cinétique moyens pour *plusieurs* valeurs du temps de moyenne Δt . La figure 5.9b présente un histogramme à deux dimensions, calculé à partir de la même trajectoire intermittente présentée en figure 5.7b. Pour chaque valeur de l'abscisse Δt , une colonne correspond à un histogramme du moment cinétique \bar{L} moyenné sur des intervalles de longueur Δt . Le nombre d'évènement est donné en niveau de couleur. Pour une trajectoire circulaire de moment cinétique constant $L = L_0$, le résultat ne dépendra pas du temps de moyenne Δt , on observe donc une ligne rouge horizontale en $\bar{L} = L_0$. Pour une lemniscate, le moment cinétique est mal défini tant que $\Delta t < T$, où T désigne

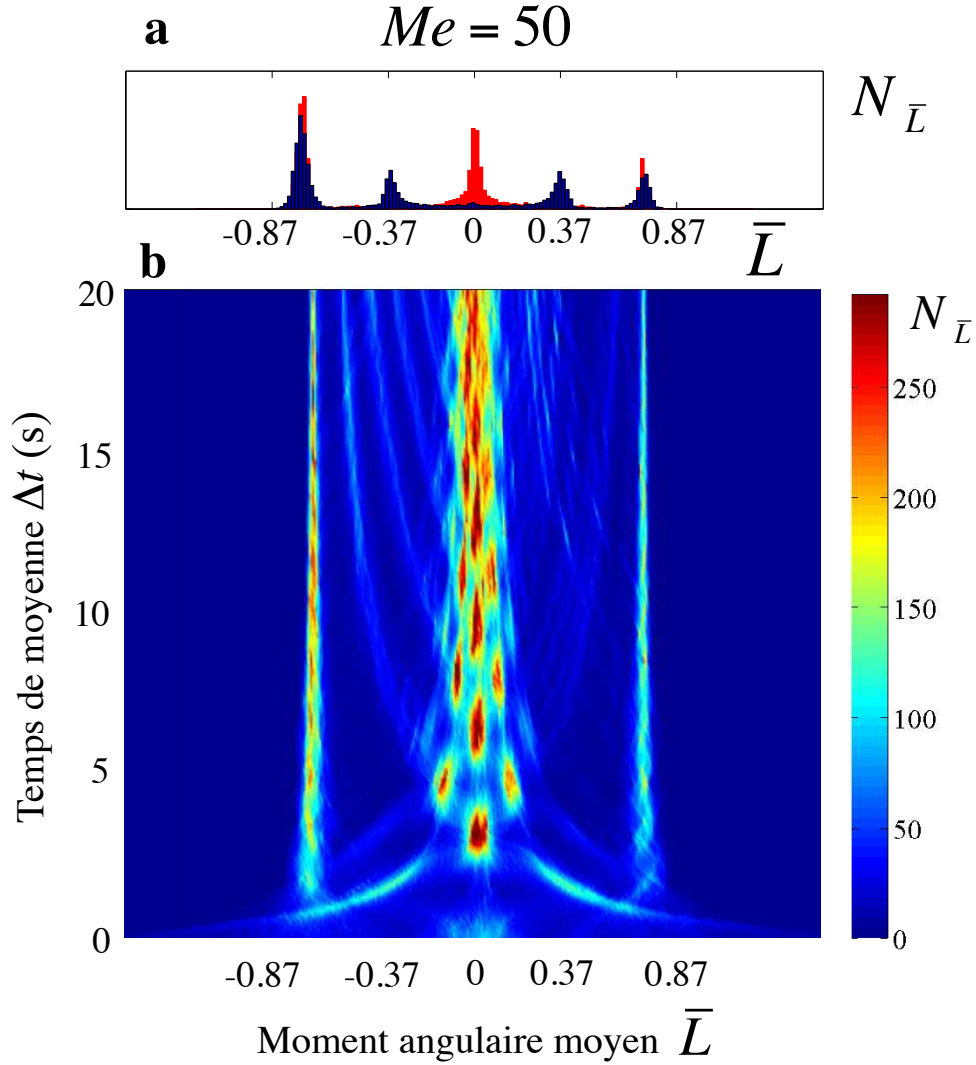


FIGURE 5.9 – **Visualisation directe d'une superposition d'états propres.** a) Histogramme à une dimension du moment cinétique \bar{L} , calculé respectivement pour un temps de moyenne $\Delta t = 1.3$ s (bleu) et $\Delta t = 3.3$ s. Ces histogrammes mettent en évidence les cercles du niveau $n = 2$, et la signature du moment cinétique d'une boucle individuelle de lemniscate $\bar{L} \approx L_{\pm 1}$ (bleu), et les lemniscates et les cercles $n = 2$ (rouge). Cet histogramme peut être calculé en variant le temps Δt de moyenne. b) Histogramme à deux dimensions du moment cinétique \bar{L} , moyenné sur un intervalle de temps Δt . Chaque ligne correspond à un histogramme en niveau de couleur, pour une valeur du temps de moyenne Δt . Les trajectoires circulaires laissent une trace en $\bar{L} \approx \pm 0.87$ quel que soit le temps de moyenne Δt . Le motif central est la signature de trajectoires de type lemniscate, où le moment cinétique \bar{L} s'annule pour un temps de moyenne Δt égal à la période du mouvement $T \approx 3.3$ s, ou un de ses multiples ($\Delta t = T, 2T$, etc.).

la période de parcours de la lemniscate. Pour $\Delta t = T/2$, l'histogramme du moment cinétique sera piqué sur la valeur de \bar{L} associé à une seule boucle. De part et d'autre de l'axe, les traits horizontaux correspondent donc aux orbites circulaires, tandis que la tâche centrée en $\bar{L} = 0$ présente un maximum en $\Delta t = T$ puis $2T$, $3T$, etc. Cette seconde famille de maxima locaux de probabilités est la signature statistique des lemniscates.

Cette représentation met donc directement en évidence la pertinence statistique des modes propres contenus dans une trajectoire complexe. Il apparaît ainsi une forme de superposition d'état dynamique : au cours du temps, la trajectoire d'un marcheur correspond à un état propre, avec transition rapide entre états. Peut-on mesurer la proportion du temps passé dans chacun des états ?

5.3.2 Une superposition dynamique de modes propres

A partir des signaux du moment cinétique L , du rayon instantané r au cours du temps, et de l'histogramme à trois dimensions, la proportion du temps passé dans chacun des modes propres accessibles peut être mesurée³. On définit donc une probabilité $p_{n,m}$ de mesurer un mode propre (n, m) comme :

$$p_{n,m} = \frac{\text{temps passé dans le mode } (n, m)}{\text{durée totale de l'expérience}} \quad (5.4)$$

Ces probabilités de présence du marcheur dans chacun des états propres peuvent être mesurées expérimentalement, en définissant un voisinage pour chacun des modes propres, avec une tolérance absolue de 0.1 sur la valeur de l'observable moyenne \bar{L} .

Dans le cas de l'intermittence au niveau $n = 2$, on définit donc des probabilités $p_{2,\pm 2}$ et $p_{2,0}$ d'être respectivement dans un état circulaire $(n, m) = (2, \pm 2)$ ⁴ ou dans un état lemniscate $(n, m) = (2, 0)$.

Ces probabilités $p_{2,\pm 2}$ et $p_{2,0}$ ont été mesurées en fonction du paramètre de confinement Λ , dans la plage de valeur qui sépare la limite de stabilité de la lemniscate $\Lambda = \Lambda_{2,0}^+$ de la limite de stabilité de l'orbite circulaire au niveau $n = 2$ ($\Lambda = \Lambda_{2,2}^-$). Elles ont été représentées en figure 5.11 en fonction du paramètre de confinement Λ , pour un paramètre de mémoire $Me \approx 50$, à partir de signaux d'une durée moyenne de 20 minutes, soit environ un millier de période typique du mouvement horizontal pour chaque point de mesure.

Une décroissance de la probabilité de mesure d'une lemniscate $p_{2,0}$ est observée, au fur et à mesure que la proportion de cercle $p_{2,2}$ croît. Chacune de ces courbes

3. Les règles de détection d'un mode propre (n, m) sont basées sur la mesure du moment cinétique moyenné sur une période du mouvement T_m , qui dépend du mode considéré. Une portion du signal est considéré comme un mode propre si le moment cinétique moyen vaut $\bar{L} = L_m \pm 0.1$.

4. On suppose ici que la symétrie miroir est respectée, *i.e.* $p_{2,-2} = p_{2,2} = p_{2,\pm 2}/2$.

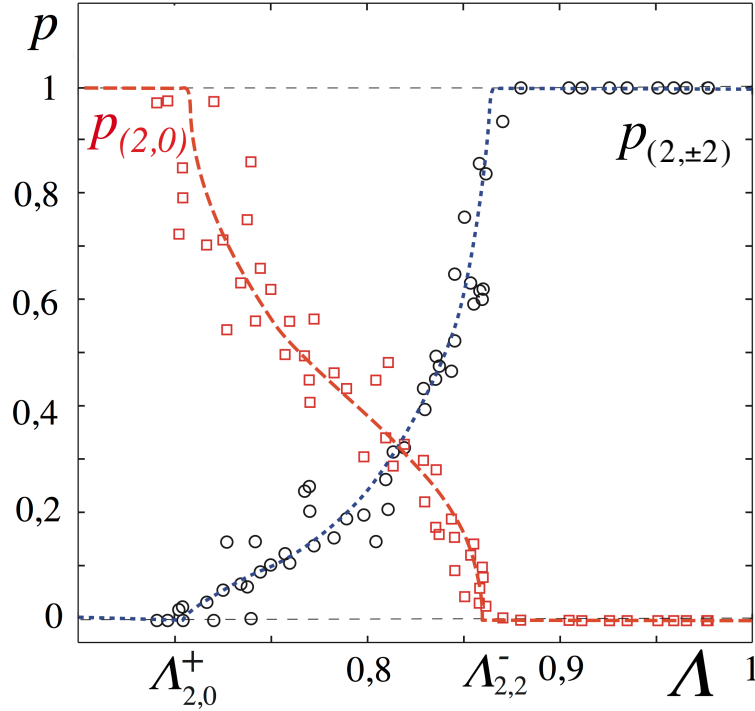


FIGURE 5.10 – **Superposition statistique d'état.** Les probabilités $p_{2,0}$ et $p_{2,\pm 2}$ d'être respectivement dans le niveau $(2, 0)$ ou les niveaux $(2, \pm 2)$ ont été représentées en fonction du paramètre de confinement Λ . Depuis $p_{2,0} = 1$, on observe une décroissance de la proportion de lemniscate, associée à une croissance de la proportion de cercle $p_{2,\pm 2}$. Quel que soit la valeur de Λ , on a $p_{2,0} + p_{2,\pm 2} \approx 1$, mettant en évidence une forme de superposition statistique d'états.

est en fait la signature de perte de stabilité d'une orbite stable. En $\Lambda = \Lambda_{2,0}^+$, une trajectoire en lemniscate devient instable. Pourtant, faiblement instable, le temps passé dans le voisinage reste grand, quasiment égal à la durée totale de l'expérience. Seule des excursions brèves diminuent légèrement la probabilité de mesure $p_{2,0}$ d'une lemniscate.

Au fur et à mesure que l'on s'éloigne du point de perte de stabilité $\Lambda_{2,0}^+$, la proportion de lemniscate diminue. Dans le même temps, la proportion de cercles croît, pour atteindre $p_{2,2} = 1$ au point de stabilité $\Lambda = \Lambda_{2,2}^-$ des orbites circulaires du niveau $n = 2$. La présence de ces plages successives de stabilité des différents modes propres assure, quelle que soit la valeur de Λ , la persistance des modes au sein de la dynamique. Cette figure montre de plus que la proportion de chacun des modes sera une fonction de l'écart relatif $\min|\Lambda - \Lambda_{n,m}^\pm|$ à leur limite de plage de stabilité.

La dynamique d'intermittence n'étant plus prédictible par une mesure individuelle sur la position de la goutte à un instant donné, le résultat accessible par une mesure ponctuelle est uniquement ces *probabilités* d'être dans l'un de ces modes

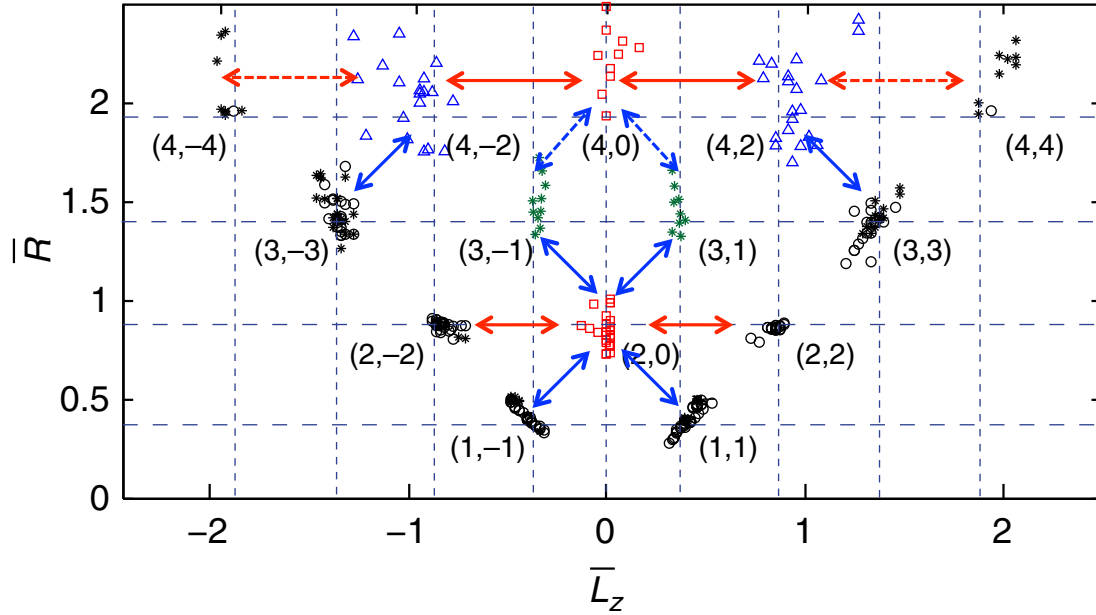


FIGURE 5.11 – **Transitions spontanées observées dans des régimes d'intermittence entre états propres.** Au diagramme de l'extension spatiale \bar{R} en fonction du moment cinétique \bar{L}_z des états propres observés a été superposé les transitions entre niveaux observées expérimentalement. L'ensemble de ces régimes d'intermittence ont été obtenu pour $200 > Me > 30$, et des valeurs variées du confinement $0.5 < \Lambda < 2$.

propres. Les trajectoires complexes d'un marcheur peuvent donc être décomposées sous la forme de probabilité de mesure de chacun des modes propres. Ils forment donc une base d'*états propres*, sur laquelle tout mouvement complexe peut être décomposé.

Notons que contrairement à une situation hamiltonienne, plusieurs états d'énergies différentes sont observés successivement. Ce type d'intermittence met ainsi en évidence la fluctuation temporelle de l'énergie d'un marcheur, soumis à un couplage avec un réservoir d'énergie qu'est la surface du bain. Il pourrait être intéressant d'étudier justement ces fluctuations d'énergie d'un marcheur au cours du temps, en englobant soit la goutte uniquement, soit également le champ d'onde qui lui est associé. Des mesures de la densité de probabilité radiale suggère que la probabilité va comme $\exp(\beta F_{ext} V_0 / T_F)$ où β est une température inverse, et $F_{ext} = -kr$ est le module de la force extérieure appliquée.

5.3.3 Notion d'*états propres* d'un marcheur confiné

Ce résultat suggère que les dynamiques intermittentes observées sont une forme de superposition dynamique d'état, où les trajectoires correspondant à différents

modes propres sont observés tour à tour. La probabilité moyenne d'occupation de chacun d'eux dépend du paramètre de confinement Λ imposé.

Les différents régimes d'intermittence observés au cours des expériences sont schématisés sur la figure 5.11, qui reprend les modes propres définis au chapitre 4 en ajoutant les transitions possibles entre niveaux, d'un état (n, m) vers un état (n', m') .

Les flèches rouges correspondent à des intermittences entre même niveau d'extension spatiale n , tandis que les flèches bleues correspondent à des intermittence entre des niveaux n différents. On peut remarquer que seules des transitions entre niveaux voisins ont été observées, et pour des modes présentant des symétries différentes : aucune transition directe telle que $m' = m$ n'a pu être mise en évidence.

Notons par ailleurs que les transitions directes entre cercles de niveau différent n'ont pas été observés. De ce point de vue là, les orbites circulaires sont relativement isolés par rapport aux modes lemniscates par exemple, qui présentent un grand nombre de transition possible. Pour les niveaux n impair (1 et 3), seule une transition en diagonale est observée, telle que $n' + |m'| = n + |m|$. Pour les niveaux n pair (2 et 4), seule une transition horizontale est observée, telle que $n = n'$ et $|m'| = |m| - 2$.

Notons par ailleurs que le nombre de mode observable dans une seule trajectoire expérimentale n'est pas limité. Par exemple au niveau $n = 4$, les signaux mettent en évidence les cinq modes de même extension spatiale.

5.3.4 Une complexité croissante avec la mémoire

En utilisant les critères de détection d'un état propre définis ci-dessus, les signaux intermittents du moment cinétique L peuvent être analysées pour une mémoire croissante Me , à un confinement Λ donné. La figure 5.12 présente le résultat obtenu pour quatre valeurs successives du paramètre de mémoire Me (40, 50, 60 et 70). Les plages d'existences des orbites circulaires ont été représentées en bleu quel que soit leur sens de rotation, tandis que les plages de lemniscate sont représentées en rouge. Pour différentes mémoires, on observe bien une succession de domaines stables, les phases laminaires, entrecoupées de régimes transitoires de durée plus courte. Pour $Me = 40$, le temps d'intermittence est de l'ordre de 100s, tandis qu'il n'est plus que de quelques secondes pour $Me = 70$. La durée moyenne du temps passé dans chaque état diminue ainsi drastiquement avec la mémoire. Une des conséquences est la difficulté croissante à définir des domaines pour chacun des modes, le temps d'intermittence devenant comparable à la période de rotation autour du centre.

Par observation directe de la trajectoire, il reste tout de même possible d'identifier les différents modes instables. La figure 5.13 présente une trajectoire obtenue pour $Me \approx 200$, dans un régime où la méthode de détection des modes ne donnent

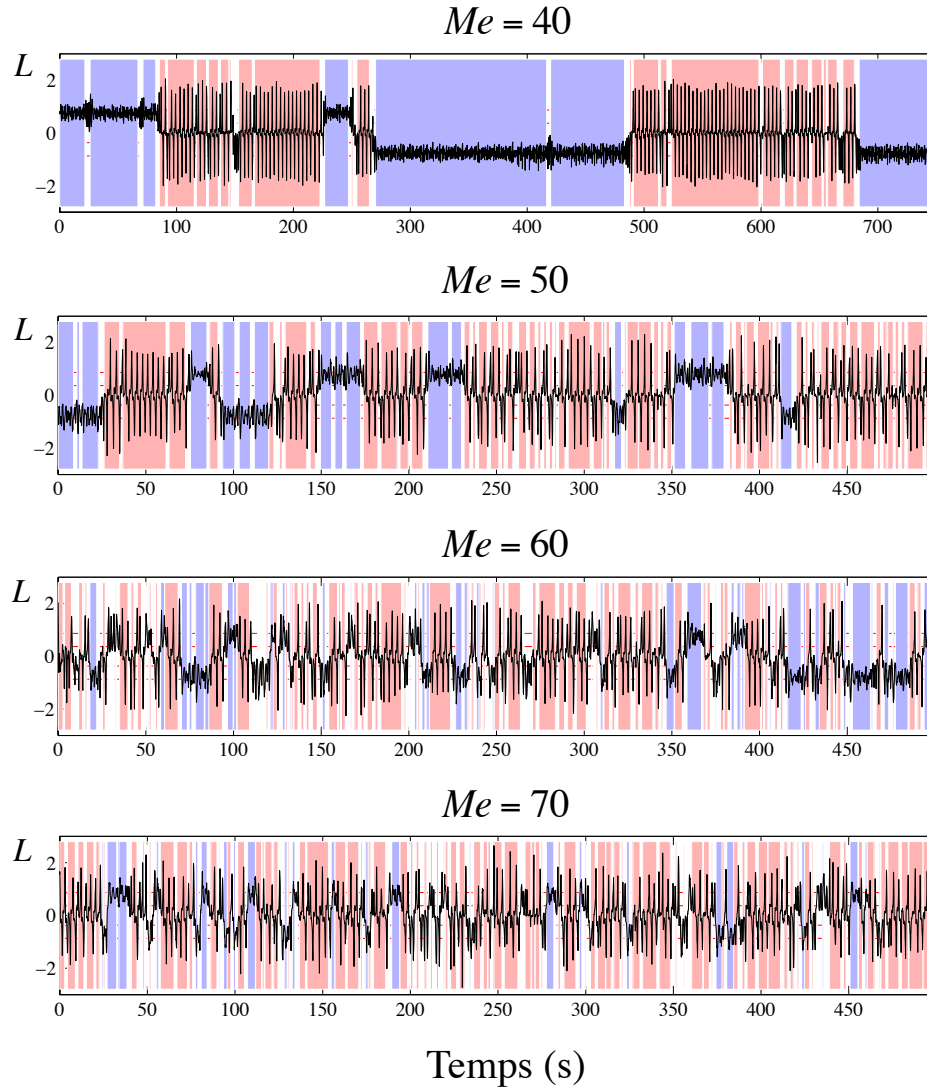


FIGURE 5.12 – **Augmentation du désordre avec la mémoire.** Quatre enregistrements du moment cinétique instantané L ont été représentée pour $Me = 40, 50, 60$ et 70 . Les domaines correspondant à une trajectoire selon un mode propre ont été colorée suivant le type de mode suivi (lemniscates en rouge, cercles en bleu). On observe que la durée de chaque domaine diminue avec la mémoire, mettant en évidence une alternance entre modes de plus en plus rapide.

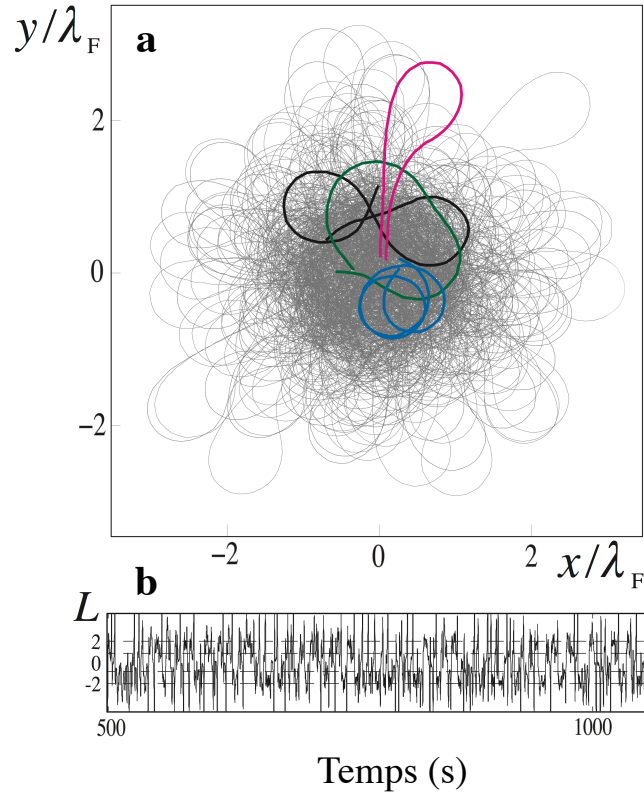


FIGURE 5.13 – **Régime chaotique obtenu dans un régime de très haute mémoire.** a) Trajectoire expérimentale obtenue pour $Me = 100$, $\Lambda = 1.02$ et $V=8.1$ mm/s (gris). Des portions de trajectoire correspondant aux modes propres définis précédemment ont été surlignés en couleur : cercle $n = 1$ (bleu), ovale $n = 2$ (vert), lemniscate $n = 2$ (noir), boucle allongée $n = 3$ (rose). b) Signal temporel du moment cinétique L , fortement erratique, ne permettant plus de détecter les différents modes propres. Une étude directe de la trajectoire au cours du temps permet tout de même d'identifier les différents modes propres.

plus de résultat pertinent. Le signal temporel du moment cinétique L associé a été représenté en figure 5.13b. L'évolution de L au cours du temps ne présente plus d'ordre particulier apparent, et une approche de type application de premier retour ne permet pas d'en étudier la dynamique. En revanche, les modes précédemment définis peuvent encore être détectés à partir de la trajectoire elle même. Plusieurs sélections représentatives du signal intermittent ont été surlignées en couleur, elles correspondent aux modes propres précédemment définis (cercles $n = 1$, ovale $n = 2$, lemniscate $(n, m) = (2, 0)$, grande boucle, $(n, m) = (3, \pm 1)$).

Cet exemple illustre là encore l'intérêt de pouvoir visualiser la dynamique dans un espace à deux dimensions, grâce à la trajectoire suivie, sans aucune perte d'information. L'introduction d'une *mémoire de chemin* est donc un moyen expérimental permettant d'observer une dynamique complexe, qui met en jeu un nombre potentiel-

lement élevé de degré de liberté. Vu les signaux temporels obtenus, il serait difficile de mettre en évidence la structure de la dynamique à partir d'un signal à une seule dimension d'espace, comme celui du moment cinétique instantané.

Une des raisons pour laquelle les modes semblent se noyer dans le signal est l'apparition de modes propres dont le centre ne coïncide pas avec celui du puits de potentiel harmonique. C'est par exemple le cas de trajectoires en lemniscate, comme celle mis en évidence sur la figure 5.13. Localement, la symétrie centrale imposé par le puits de potentiel extérieur est brisé. Cet effet est d'autant plus fort que la mémoire est augmentée, comme si, peu à peu, la vision en terme de potentiel central perdait de sa pertinence. Cet effet met encore une fois en évidence que les états propres du marcheur confiné ne dépendent pas nécessairement du potentiel extérieur, mais bien de l'interaction entre la goutte et son champ d'onde⁵.

5.4 Conclusion

L'étude des trajectoires à haute mémoire d'un marcheur confiné met en évidence une dynamique désordonnée, dont le désordre croît avec la *mémoire de chemin*. Au voisinage du premier niveau $n = 1$, la dynamique devient alors chaotique au sens des systèmes dynamiques, c'est à dire que l'évolution du système reste déterministe mais la prédictibilité est perdue après un temps fini. Pour les niveaux supérieurs ($n = 2$ en particulier) un déterminisme n'a pu être identifié. Celui ci peut être masqué par un plus grande nombre de degré de liberté de la dynamique, ou par l'apparition d'un second mécanisme, une amplification du bruit par accumulation d'un nombre M de sources d'onde, l'amplitude de chacune d'elle étant légèrement bruitée.

Un autre résultat important est l'observation d'une application de premier retour ne pouvant pas être réduite à l'évolution d'un point matériel. Cette application met en évidence, du point de vue *dynamique*, la pertinence d'une *mémoire ondulatoire* dans l'évolution de la dynamique. L'augmentation de la dimension effective du système, via un stockage d'information dans le champ d'onde, est à l'origine des comportements chaotiques observés. Ajouter une cohérence temporelle au mouvement d'un mobile ponctuel peut donc rendre un système de plus en plus instable, voire imprédictible.

Dans cette dynamique intermittente, l'apparition des modes propres de la dynamique persiste, même à haute mémoire. Il apparaît qu'à chaque instant, le marcheur est dans l'un des modes propres. Dans la limite de régime chaotique, seul les proba-

5. Il est possible qu'une structure en couche subsiste tout de même, où il existe des corrélations entre l'apparition d'un état propre et la distance du centre. Nos travaux récents tendent à montrer que les niveaux circulaires d'extension spatiale plus élevé se retrouve en moyenne plus proche du centre que les premiers niveaux, plus équiréparti sur l'ensemble de l'espace visité.

bilités de mesure de chacun de ces modes sont encore accessibles. Toute trajectoire complexe peut ainsi être décomposée comme une succession de modes propres, qui forment donc la base d'*états propres* du mouvement d'un marcheur dans un puits de potentiel harmonique.

Chapitre 6

Confinement et mémoire de chemin

III :

Les trajectoires cassiniennes

L'étude de la dynamique d'un marcheur dans un puits de potentiel harmonique au cours des deux chapitres précédents a mis en évidence une famille d'états propres. Ceux ci peuvent être caractérisés par deux observables globales que sont l'extension spatiale \bar{R} et le moment cinétique moyen \bar{L} . Suivant le confinement Λ imposé par le puits de potentiel, la trajectoire observée peut être un état pur, ou un mélange de mode avec transitions intermittentes entre eux. Cependant, cette description des états propres en terme de variables globales ne renseigne en aucun cas sur la sélection de forme des trajectoires suivies.

Ce chapitre présente une caractérisation des trajectoires des états propres observés en terme de courbes de Cassini. En utilisant des propriétés géométriques de ces courbes, nous verrons qu'il est possible d'exprimer la force exercée par les ondes le long d'une lemniscate. Cette étude permettra d'identifier les modes de champs associés participant effectivement au bilan des forces. Un développement perturbatif autour d'une trajectoire circulaire permettra alors de généraliser le calcul effectué au chapitre 4 sur les trajectoires circulaires. Appliqué au cas des Ovals ce modèle permettra d'expliquer leur émergence au voisinage du mode $n = 2$, illustrant ainsi la sélection d'une symétrie de trajectoire par la champ d'onde généré.

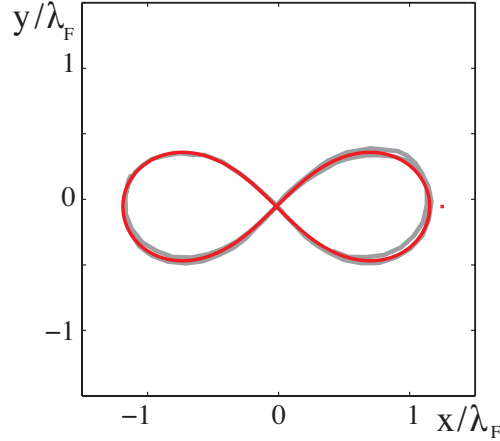


FIGURE 6.1 – **Lemniscate de Bernoulli expérimentale.** Trajectoire en huit d’extension spatiale $\bar{R} = 0.82$ obtenu pour un confinement $\Lambda = 0.55$, et un paramètre de mémoire $Me = 36$. Cette trajectoire peut être interpolée par une lemniscate de Bernoulli dont l’équation en coordonnées polaires est donnée par l’équation 6.1 caractérisée uniquement par son extension spatiale.

6.1 Une Caractérisation géométrique des trajectoires des états propres

La description des états propres d’un marcheur confiné en terme de variables moyennes globales permet de définir des règles de sélection, mais ne renseigne en aucun cas sur la forme de la trajectoire suivie. L’interaction entre la goutte et son champ étant médiée par une mémoire de chemin qui dépend de la trajectoire suivie, il est pourtant nécessaire de décrire la forme exacte des trajectoires observées.

Nous verrons dans cette section qu’il existe une caractérisation géométrique, par une famille de courbes mathématiques analytique, des trajectoires des états propres observés .

6.1.1 Trajectoires en huit : des lemniscates de Bernoulli

Les trajectoires en huit sont observées dans une large gamme de mémoires Me comme de confinements Λ . Elles correspondent à deux états propres de la dynamique de moment cinétique moyen \bar{L} nul, $(n, m) = (2, 0)$ et $(n, m) = (4, 0)$. La figure 6.1 présente une trajectoire en huit du niveau $(n, m) = (2, 0)$. Cette trajectoire correspond à une lemniscate de Bernoulli, dont l’équation en coordonnées polaires (r, θ) est donnée par :

$$r^2 = 2\bar{R}^2 \cos(2\theta) \quad (6.1)$$

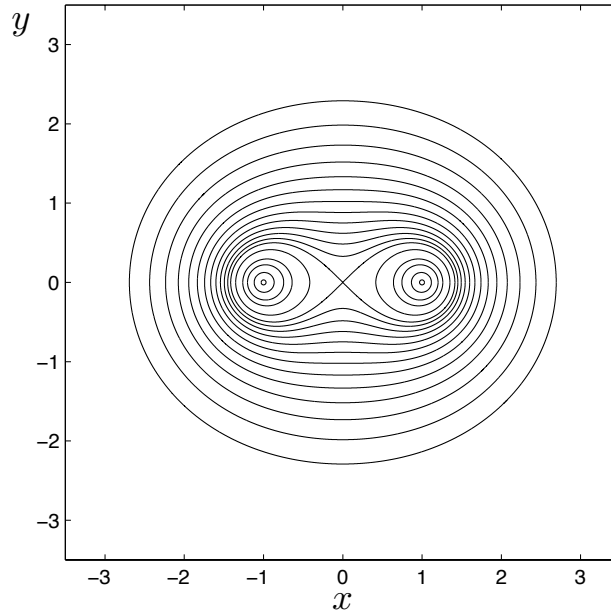


FIGURE 6.2 – **Courbes de Cassini.** Un ovale de Cassini est défini comme le lieu des points M tel que le produit de la distance à deux points fixes O et O' soit constants. On note b la valeur de la constante et a la distance OO' . $e = a/b$ désigne l'excentricité de l'ovale. La lemniscate de Bernoulli (forme en huit) correspond à $e = 1$.

où \bar{R} est l'extension spatiale moyenne de la trajectoire définie au chapitre 4. La courbe rouge de la figure 6.1 correspond à un ajustement sans paramètre ajustable par une lemniscate de Bernoulli de même extension spatiale \bar{R} .

Cette courbe géométrique d'équation polaire simple et dont le rapport d'aspect ne peut être ajusté, est en très bon accord avec la courbe expérimentale observée.

Cette lemniscate de Bernoulli appartient en fait à une famille plus large de trajectoires, appelées *ovales de Cassini*.

6.1.2 Courbes de Cassini

Les ovales de Cassini ont été introduits au XVII^{ème} siècle par Giovanni D. Cassini, astronome niçois. Non convaincu par les théories émergentes de Kepler, il proposa une description alternative du mouvement du soleil autour de la terre, en plaçant cette dernière à l'un des foyers de ces ovales. Une description de sa découverte est donnée 50 ans plus tard par son fils Jean Cassini, dans ces *Eléments d'astronomie* [13] :

Depuis l'observation exacte de la grandeur apparente des diamètres du soleil, mon père a trouvé une autre courbe différente de l'ellipse, qui sert à représenter fort

exactement les mouvements vrais du Soleil, et ses diverses distances à la Terre. Il suppose que la terre étant placée à l'un des foyers de cette courbe, le soleil la parcourt par son mouvement propre, de manière que tirant de son centre aux deux foyers de la courbe deux lignes droites, le rectangle fait sur ces deux lignes soit toujours égal au rectangle fait sur la plus grande et la plus petite distance du Soleil à la Terre.

Ces courbes, représentées graphiquement sur la figure 6.2, n'ont pas connu leur heure de gloire. Les orbites célestes ont finalement été identifiées comme des trajectoires elliptiques autour du soleil et les Cassiniennes ont été reléguées au rang de curiosité mathématique. Là où l'ellipse est définie comme le lieu des points tel que la somme des distances à deux points fixes est constante, l'ovale de Cassini correspond au lieu des points M tel que le produit de la distance à deux points fixes O et O' est constant :

$$OMOM' = b^2. \quad (6.2)$$

Comme la famille des ellipses, leur forme peut être définie par un seul paramètre appelé l'excentricité e , définie par $e = a/b$ où a correspond à la distance OO' et b à la valeur de la constante. Suivant la valeur de cette excentricité e , on obtiendra un ovale convexe ($0 < e < 1/\sqrt{2}$), un ovale pincé ($1/\sqrt{2} < e < 1$) ou deux trajectoires fermées disjointes ($e > 1$).

La lemniscate de Bernoulli observée expérimentalement correspond à $e = 1$, et $b = \bar{R}$. Non solutions du mouvement d'un point matériel dans un champ de force central, la lemniscate peut néanmoins être observée. Quid des formes en ovales ?

6.1.3 Ovaes de Cassini

Les trajectoires circulaires observées expérimentalement correspondent à des ovales de Cassini d'excentricité e nulle. Au voisinage du mode $(n, m) = (2, \pm 2)$, il apparaît également des trajectoires en forme d'ovale. Celles ci peuvent être observées stables à mémoire intermédiaire ($20 < Me < 40$) ou composer les signaux intermittents à plus haute mémoire.

La figure 6.3 présente trois exemples d'ovales observés expérimentalement pour une déformation d'amplitude croissante (figure 6.3a, b et c). Ces trajectoires peuvent être interpolées par des ovales de Cassini, dont l'équation en coordonnées polaires s'écrit :

$$r^4 - 2b^2e^2r^2 \cos(2\theta) + b^2(e^2 - 1) = 0 \quad (6.3)$$

où e désigne l'excentricité de l'ovale. Pour les trajectoires expérimentales de la figure 6.3, on trouve $e = 0$, $e = 0.4$ et $e = 0.65$ respectivement. L'ensemble de la gamme d'excentricité $0 < e < 1/\sqrt{2}$ peut être observé. Les courbes correspondant à des ovales non convexes ($1/\sqrt{2} < e < 1$) n'ont pas été observées stables. Elles

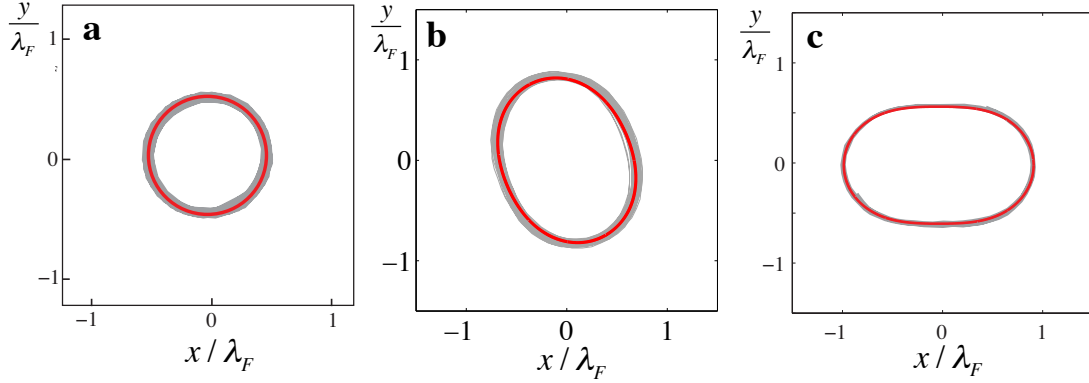


FIGURE 6.3 – **Ovales de Cassini.** Trajectoires en oval obtenu pour un confinement $0.87 < \Lambda < 0.79$ décroissant dans un régime de mémoire intermédiaire $Me = 35$ et pour un marcheur de vitesse $V = 8.6$ mm/s. Ces courbes ont été interpolées par des ovales de Cassini donnés par l'équation 6.3 avec un paramètre ajustable, l'excentricité e de l'ovale. a) $e = 0$, b) $e = 0.4$, c) $e = 0.6$.

apparaissent cependant lors de brefs régimes transitoires entres deux états propres dans les signaux intermittents.

Il existe donc une famille de courbe géométrique, les ovales de Cassini, correspondant aux trajectoires observées expérimentalement pour les cercles, les ovales convexes ($e < 1/\sqrt{2}$), et la lemniscate de Bernoulli ($e = 1$).

Il existe néanmoins un autre mode propre stable, le trifolium, dont la forme ne correspond pas à un ovale de Cassini. La forme régulière à trois lobes nous invite cependant à généraliser l'expression des ovales ci dessus aux k -courbes de Cassini.

6.1.4 Etats propres : des k -courbes de Cassini

Pour décrire les trajectoires de type trifolium, il est possible de généraliser les courbes de Cassini aux k -courbes de Cassini définies comme le lieu des points M tel que le produit de la distance à k points fixes soit constant. Les points fixes sont de plus répartis uniformément sur un cercle de rayon b . Cette définition géométrique permet de déduire une équation polaire unique pour l'ensemble des k -courbes de Cassini qui s'écrit :

$$\left(\frac{r}{b}\right)^{2k} - 2e^k \left(\frac{r}{b}\right)^k \cos(k\theta) + e^{2k} - 1 = 0 \quad (6.4)$$

où b désigne le produit des distances, e l'excentricité et k l'ordre de la Cassinienne considérée. Pour $k = 2$, on retrouve l'ensemble des ovales de Cassini définis précédemment.

La figure 6.4 présente un exemple de trifolium observé expérimentalement, sur lequel a été superposée une 3-courbe de Cassini, d'excentricité $e = 1$, là où la

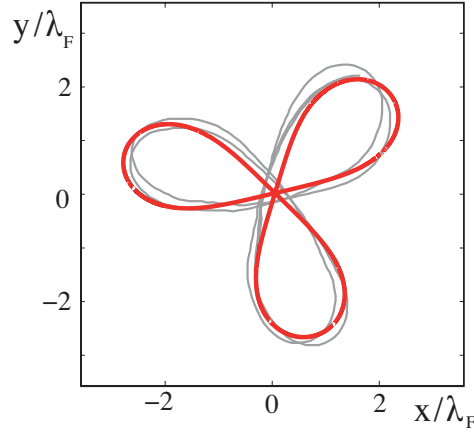


FIGURE 6.4 – **3-courbe de Cassini : le trifolium.** Trajectoire présentant une symétrie par rotation de $2\pi/3$ obtenue pour $\Lambda = 1.6$ et $Me = 50$. Ajustement par une 3-courbe de cassini appelée trifolium d'excentricité $e = 1$ d'après l'équation 6.4.

lemniscate correspondait à $k = 2$ et $e = 1$. On trouve également un bon accord entre courbe théorique (rouge) et trajectoire observée (gris). Notons par ailleurs que les déformations de trifolium ou de cercles présentant une symétrie 3 présentent également des formes en 3-courbe de Cassini, dont l'excentricité e varie entre 0 et 1. Il existe aussi une gamme d'excentricité e pour laquelle aucune trajectoire stable n'a été observée.

Les k -courbes de Cassini forment ainsi une famille de courbes analytiques correspondant aux trajectoires des états propres observés expérimentalement. A ce titre, il est surprenant de retrouver une famille de courbe géométrique qui n'avait, à ma connaissance, par été observée en tant que trajectoire.

Quel mécanisme permet de sélectionner cette famille de courbe géométrique ? Pour répondre à cette question, il est nécessaire de s'intéresser à une autre propriété des k -courbes de Cassini : leur courbure locale. Nous nous focaliserons sur le cas $k = 2$, correspondant aux ovales de Cassini et à la lemniscate de Bernoulli.

6.1.5 Courbure locale d'une k -courbe de Cassini

Les courbes de Cassini présentent une autre caractéristique remarquable qui est l'expression de leur courbure locale κ . Pour $k = 2$, la courbure κ s'exprime en fonction des coordonnées polaires (r, θ) sous la forme :

$$\kappa = \frac{r}{b^2} + \frac{e^2}{r} \cos(2\theta) \quad (6.5)$$

Cette expression peut être testée expérimentalement en mesurant la courbure κ le long d'un ovale de Cassini. La figure 6.5 présente une trajectoire en ovale d'excentricité $e = 0.4$. La figure 6.5 présente l'expression de sa courbure κ en fonction de

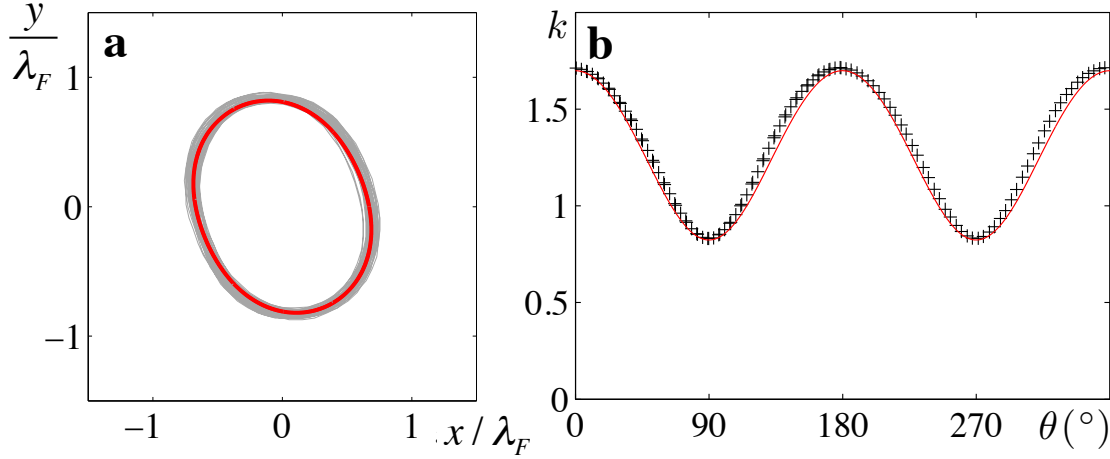


FIGURE 6.5 – **Courbure locale d'un ovale de Cassini.** a) Trajectoire en oval correspondant à un ovale de Cassini d'extension spatiale $\bar{R} = 0.72$ et d'excentricité $e = 0.4$, observé pour $Me = 30$ et $\Lambda = 0.8$. b) Mesure de la courbure locale κ le long de l'ovale en fonction de l'angle polaire θ . La courbure κ a été normalisée par la longueur d'onde de Faraday. Courbe expérimentale obtenue par moyenne sur 20 ovales consécutifs (+) et courbe théorique (rouge) donnée par l'équation 6.5 pour $e = 0.4$.

l'angle polaire θ . On observe une oscillation de la courbure quasi-sinusoidale autour d'une valeur moyenne. A partir de l'équation 6.5, la prédiction théorique (courbe rouge) peut être comparée à l'expérience. En prenant $e = 0.4$, on retrouve un bon accord entre courbure locale de la trajectoire et courbure d'un ovale de Cassini de même excentricité.

L'amplitude de cette oscillation va dépendre de l'excentricité e de l'ovale observé. La limite de convexité de l'ovale est d'ailleurs atteinte pour une amplitude d'oscillation de la courbure égale à sa valeur moyenne qui correspond à $e = 1/\sqrt{2}$.

Dans le cas d'une lemniscate de Bernoulli ($e = 1$) l'expression de la courbure κ s'exprime sous la forme :

$$\kappa = \frac{3r}{2b^2} \quad (6.6)$$

Cette expression de la courbure peut être obtenue à partir de l'équation 6.1. La figure 6.6a présente une lemniscate de Bernoulli observée expérimentalement pour $Me = 35$ et d'extension spatiale $\bar{R} = 0.85$. La courbure mesurée le long de cette trajectoire est représentée en figure 6.6b, chaque point gris correspondant à une mesure locale. Une valeur moyenne par tranche a également été représentée (o), où les points correspondant à un éloignement du centre ($V_r > 0$) ont été séparés de ceux correspondant à une convergence vers le centre ($V_r < 0$). La courbe rouge correspond à la prédiction théorique donnée par l'équation 6.6, de même extension spatiale \bar{R} que la trajectoire expérimentale. On remarque que pour un éloignement du centre

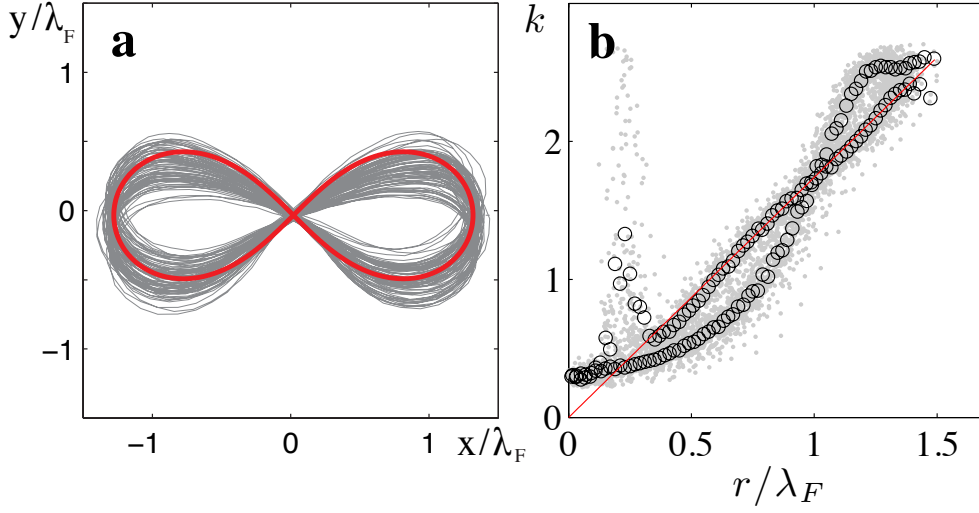


FIGURE 6.6 – **Courbure locale d’une lemniscate de Bernoulli.** a) Trajectoire en huit correspondant à une lemniscate de Bernoulli d’extension spatiale $\bar{R} = 0.85$ pour $Me = 35$ et $\Lambda = 0.62$. b) Mesure de la courbure locale κ le long de la lemniscate en fonction de la distance au centre r/λ_F normalisée par la longueur d’onde de faraday (points gris). Une moyenne par tranche a été effectuée, en séparant les points tels que $V_r > 0$ (courbe linéaire) et $V_r < 0$. La courbe rouge correspond à la prédiction théorique donnée par l’équation 6.6.

$V_r > 0$, la courbe correspond parfaitement à la prédiction théorique¹. Pour $V_r < 0$, on remarque une légère déviation par rapport à la courbe théorique. Ces variations sont associées à des fluctuations de vitesse le long de la trajectoire suivie.

Sur l’ensemble de la trajectoire, on retrouve tout de même un bon accord entre courbure locale de la trajectoire et distance au centre, donnée par l’équation 6.6.

Ce résultat peut également être étendu aux trifolium. Un bon accord entre courbure locale et prédiction théorique dérivée à partir de l’équation 6.4 est également observé.

La caractérisation géométrique des trajectoires sous forme de k -courbes de Cassini permet ainsi d’obtenir une seconde caractérisation, simple, basée sur leur courbure locale κ .

Cette caractérisation en terme de courbure locale met en évidence des relations simples permettant de paramétrer les différentes trajectoires de symétrie non circulaire, comme les ovales, la lemniscate ou le trifolium.

1. Sauf au voisinage immédiat du centre, *i.e.* au moment où le sens de rotation de la boucle est déterminé. Cet mauvaise définition de la courbure au passage du centre pourrait être à l’origine de défauts dans les lemniscates observées, soit une succession de deux boucles de même sens.

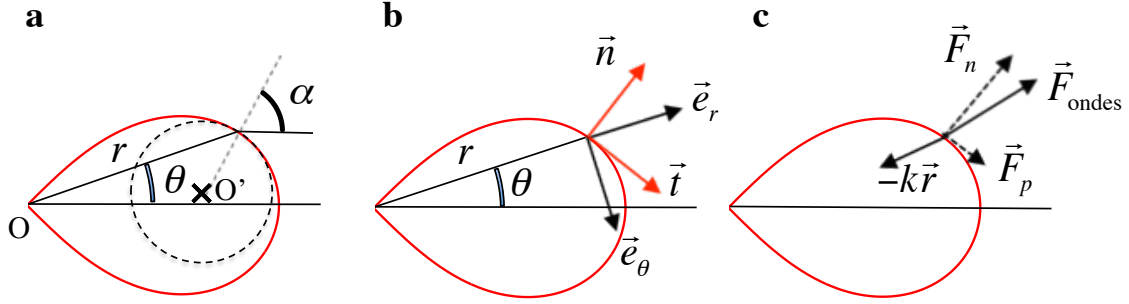


FIGURE 6.7 – **Notations : base de Frénet et forces appliquées sur la goutte.**
a) Repère polaire (r, θ) , angle local α formé entre la tangente la à trajectoire et l'axe horizontal et cercle osculateur permettant de définir le rayon de courbure instantané R_C .
b) Base polaire (r, θ) et base de Frénet (\vec{t}, \vec{n}) obtenue par rotation d'un angle $(\alpha - \theta)$. c) Bilan des forces appliquées sur la goutte : force exercée par le potentiel central magnétique en $-\vec{k}\vec{r}$, friction effective en $-\eta\vec{V}$ et force exercée par les ondes \vec{F}_{ondes} . Celle-ci peut être décomposée en une composante tangente \vec{F}_p de propulsion et une composante normale \vec{F}_m de guidage.

6.2 Origine des trajectoires cassiniennes

Le but de cette section est d'expliquer l'émergence de cette relation entre courbure locale de la trajectoire et coordonnées polaires. Pour expliciter ce lien, revenons sur les conclusions du chapitre 3, consacré au marcheur amnésique :

Le mouvement d'un marcheur est non conservatif par nature, en raison de la propulsion par les ondes. Il faut donc séparer la description du mouvement en une composante tangentielle ou longitudinale au mouvement qui régit les fluctuations de vitesse autour de la vitesse d'équilibre, et une description selon la direction normale à la trajectoire où l'accélération est égale à la somme des forces extérieures appliquées sur la goutte. Dans les forces extérieures appliquées, il faut tenir compte également, à haute mémoire, de la force exercée par les ondes sur la goutte.

Pour décomposer la dynamique entre direction tangente et normale au mouvement, le référentiel associé à la goutte et orienté selon la direction tangente apparaît comme un choix judicieux.

6.2.1 Equation de la dynamique dans la base de Frénet

La base de Frénet (M, \vec{t}, \vec{n}) attachée au mouvement d'un point matériel situé en M est illustrée en figure 6.7b. Elle permet d'adopter un point de vue associé au mouvement de la goutte au cours du temps. Dans cette base, les équations du mouvement se décomposent naturellement selon la direction tangente \vec{t} et la direction

normale \vec{n} à la trajectoire sous la forme :

$$m_G \frac{dV}{dt} = -k\vec{r} \cdot \vec{t} - \eta V + F_{\text{ondes}} \cdot \vec{t} \quad (6.7)$$

$$-m_G \frac{V^2}{R_c} = -k\vec{r} \cdot \vec{n} + F_{\text{ondes}} \cdot \vec{n} \quad (6.8)$$

où R_c désigne le rayon de courbure instantané de la trajectoire suivie par la goutte, comme illustré sur la figure 6.7a. Nous utiliserons également l'angle α formé par le vecteur normal \vec{n} à la trajectoire et un axe fixe, ici l'axe horizontal. La figure 6.7b présente les vecteurs de base (\vec{t}, \vec{r}) du repère de Frénet, par rapport aux vecteurs de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ du repère polaire, où \vec{n} désigne le vecteur normal à la trajectoire, et \vec{t} le vecteur tangent à la trajectoire.

La figure 6.7c présente un schéma du bilan des forces, où la force F_{ondes} exercée par les ondes sur la goutte peut être décomposée en une composante tangentielle, \vec{F}_p dites force de propulsion, et une composante normale à la trajectoire \vec{F}_m que nous appellerons force de mémoire².

L'équation selon la direction tangente au mouvement va régir les fluctuations de vitesse au cours du temps. En pratique, ces fluctuations sont d'amplitudes faibles. Par exemple le long d'une lemniscate, la vitesse varie d'au plus 20%. Une caractérisation de ces fluctuations de vitesse sera tout de même donnée dans le cas de la lemniscate. Pour les descriptions analytiques des formes observées, nous ferons l'approximation de vitesse constante, *i.e.* $V = V_0$.

6.2.2 Contrainte de vitesse

Pour le bilan de force selon la direction normale au mouvement, l'hypothèse de vitesse constante $V = V_0$ permet d'obtenir une expression de la forme :

$$V_0^2 \kappa = \omega^2 \vec{r} \cdot \vec{n} - a_m \quad (6.9)$$

où $\kappa = 1/R_c$ désigne la courbure instantanée de la trajectoire et $\omega^2 = k/m_W$ la pulsation imposée par le potentiel harmonique. $a_m = F_m/m_W$ désigne la force par unité de masse, *i.e.* l'accélération imposée par les ondes sur la goutte.

L'équation 6.9 met en évidence que la courbure κ de la trajectoire est une fonction des forces exercées sur la goutte. Cette expression n'est pas sans rappeler la caractérisation géométrique des courbes de Cassini (ovale et lemniscate) présentée en figures 6.5 et 6.6.

2. En pratique, la force de propulsion provient également d'un effet de mémoire, mais celle ci reste analogue à celle exercée sur une particule auto-propulsée classique, qui n'est pas usuellement considéré comme un système à mémoire

L'équation ainsi obtenue est fondamentalement différente des équations du mouvement d'un mobile conservatif. La contrainte de vitesse constante impose en effet que l'accélération totale soit donnée par la courbure locale κ de la trajectoire. Une des conséquences importantes est que la perturbation naturelle d'une trajectoire circulaire ne sera pas une ellipse, mais une trajectoire telle que la courbure locale est perturbée. A ce titre, la famille des ovales de Cassini présente la particularité d'avoir une expression simple de leur rayon de courbure, dont on rappelle l'expression :

$$\text{Ovale : } \kappa = \frac{r}{b^2} + \frac{e^2}{r} \cos(2\theta) \quad (6.10)$$

$$\text{Lemniscate : } \kappa = \frac{3r}{2b^2} \quad (6.11)$$

Ces expressions sont à mettre en regard avec l'équation 6.9 obtenue précédemment. Notons également que ces trois équations (6.9, 6.10 et 6.11) ne font intervenir aucune dérivée temporelle. La dynamique d'un marcheur peut donc se ramener à un problème purement géométrique : chercher les courbes telles que l'équation soit vérifiée en tout point de la trajectoire.

Le problème purement géométrique de l'équation 6.9 est déjà ardu, puisque l'expression de l'accélération imposée par les ondes a_{ondes} dépend de l'ensemble de la trajectoire suivie. Une résolution complète de cette équation nécessiterait de déduire les formes des trajectoires sélectionnées à partir de la force exercée par les ondes sur la goutte, qui dépend de la trajectoire suivie. Cette résolution est hors de propos ici.

En revanche, il est possible de supposer des symétries pour les solutions géométriques et d'exprimer l'accélération a_{ondes} exercée par les ondes le long de ces trajectoires. Dans le cas de la lemniscate, nous supposons une trajectoire de cette forme pour décrire la force exercée par les ondes sur la goutte. Ce calcul nous permettra de déduire quels sont les modes de champ qui engendrent ce type de trajectoire.

Dans le cas des perturbations d'un cercle, nous verrons qu'il est possible d'exprimer les forces exercées par les ondes, pour déduire que la famille des ovales de Cassini correspond bien aux perturbations d'ordre 2 (*i.e* π périodique) d'une trajectoire circulaire.

Notons qu'à partir de l'équation 6.9, la dynamique peut également être étudiée en exprimant la courbure κ comme une fonction de l'angle α local formé par la trajectoire, reliés par l'expression :

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{V_0} \frac{d\alpha}{dt} \quad (6.12)$$

Où $ds = V_0 dt$ dans le cas d'une trajectoire parcourue à vitesse constante V_0 . Cette équation permet de réintroduire une dépendance temporelle dans l'équation pour analyser le comportement dynamique. Sous cette forme, l'équation se rapproche du

calcul effectué au chapitre 4 dans le cas d'un marcheur dans un puits de potentiel adaptatif (limite de trajectoires circulaires).

6.3 Bilan de force le long d'une lemniscate

Cette section présente un calcul analytique de la force exercée par les ondes sur la goutte le long d'une trajectoire en lemniscate. Un peu technique, ce calcul permet de mettre en évidence l'influence effective des différents modes le long de la trajectoire.

6.3.1 Quelques propriétés utiles de la lemniscate de Bernoulli

Quelques propriétés supplémentaires de la lemniscate nous seront utiles pour exprimer le champ d'onde dans la base de Frénet. Celles ci peuvent être dérivées à partir de l'équation en coordonnée polaire d'une lemniscate de Bernoulli :

$$r^2 = 2b^2 \cos 2\theta \quad (6.13)$$

où b désigne la constante de la courbe de Cassini, ou l'extension spatiale quadratique moyenne de la trajectoire. Nous utiliserons également $r_0 = b\sqrt{2}$ qui correspond à l'extension maximale de la lemniscate. La courbure κ associée à une telle trajectoire est donnée par l'équation 6.11.

Relation entre α et θ

En utilisant l'expression de la courbure sous la forme $\kappa = d\alpha/ds$, l'expression de l'angle local α s'écrit :

$$d\alpha = \frac{3r}{2b^2} ds \quad (6.14)$$

où s désigne l'abscisse curviligne, $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. En différenciant l'équation 6.13, on peut obtenir une relation liant $d\alpha$ et $d\theta$ sous la forme :

$$d\alpha = 3d\theta \quad (6.15)$$

Cette propriété de la lemniscate présente l'avantage d'être *locale*, et définie donc une intégrale première du mouvement : $d\alpha/d\theta$ est conservé le long d'une lemniscate. Cette intégrale première du mouvement est d'ailleurs vérifiée expérimentalement. Elle signifie qu'au cours du temps, la vitesse de rotation du marcheur par rapport à son centre de courbure est toujours triple par rapport au centre du puits de potentiel. Dans le cas d'un tréfoilium, on trouve $d\alpha = 4d\theta$. Pour $e = 1$, et $k > 1$ on trouve $d\alpha = (k + 1)d\theta$ pour une k -courbe de Cassini.

Expression de la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ dans le repère de Frénet

Le champ d'onde généré par un marcheur s'exprime dans la base polaire (r, θ) associée aux fonctions de Bessel centrées de la décomposition en modes. Pour passer de cette base polaire au repère de Frénet, il faut effectuer une rotation d'un angle $\alpha - \theta$, comme illustré par les schémas de la figure 6.7. Comme le long d'une lemniscate on a $d\alpha = 3d\theta$ (caractérisation géométrique locale), soit $\alpha - \theta = 2\theta$, les relations de passage de la base de polaire au repère de Frénet se mettent sous la forme :

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} -\sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{pmatrix}, \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Dans la base (\vec{t}, \vec{n}) . Ces relations permettrons d'exprimer la décomposition en mode du champ h dans la base de Frénet.

6.3.2 Expression de la force exercée par les ondes le long d'une lemniscate

On rappelle l'expression du champ d'onde $h(\vec{\rho}, t)$ généré par un marcheur le long d'une trajectoire \vec{r} décomposé dans la base des Bessel centrées J_k :

$$\bar{h}(\vec{\rho}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_k(t) J_k(\rho) e^{ik\phi} \quad (6.17)$$

$$\bar{h}_k[r] = \sum_{n=1}^{\infty} J_k(\vec{r}(t_n)) e^{-ik\theta(t_n)} e^{-n/M}. \quad (6.18)$$

La force F_{ondes} exercée par les ondes sur la goutte dérive alors de ce potentiel,

$$F_{\text{ondes}} = -\vec{\nabla} \bar{h} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\rho} \bar{h} \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\phi} \bar{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\phi \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

En dérivant l'équation 6.18, il vient :

$$\vec{\nabla}_\rho \bar{h}(\rho, \phi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_k(t) J'_k(\rho) e^{ik\phi} \vec{e}_r \quad (6.20)$$

$$\vec{\nabla}_\phi \bar{h}(\rho, \phi, t) = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_k(t) J_k(\rho) i k e^{ik\phi} \vec{e}_\theta \quad (6.21)$$

Ces équations du champ d'onde ont été obtenue pour une trajectoire quelconque. Les coefficients \bar{h}_k sont donnés par l'équation 6.18.

En utilisant l'expression des vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ dans la base (\vec{t}, \vec{n}) , la force exercée par les ondes se met sous la forme :

$$F_m = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_k(t) \left(J'_k(r) \cos(2\theta) - \frac{1}{r} J_k(r) i k e^{ik\theta} \sin(2\theta) \right) \quad (6.22)$$

$$F_p = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_k(t) \left(-J'_k(r) \sin(2\theta) + \frac{1}{r} J_k(r) i k e^{ik\theta} \cos(2\theta) \right) \quad (6.23)$$

où $F_m = \vec{\nabla}_\rho \bar{h}(\rho, \phi, t) \cdot \vec{n}$ est la projection de la force $F_{\text{ondes}}^{\vec{r}}$ selon la direction normale, et $F_p = \vec{\nabla}_\phi \bar{h}(\rho, \phi, t) \cdot \vec{t}$ est la projection de la force $F_{\text{ondes}}^{\vec{r}}$ exercée par les ondes selon la direction tangente au mouvement. En utilisant la caractérisation de la lemniscate $r^2 = 2b^2 \cos(2\theta)$, il vient :

$$F_m = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_k(t) \left(J'_k(r) \frac{r^2}{2b^2} - \frac{1}{r} J_k(r) k e^{i2\theta} \cos(k\theta) \right) \quad (6.24)$$

$$F_p = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_k(t) \left(-J'_k(r) \sqrt{1 - \left(\frac{r}{b\sqrt{2}} \right)^4} + J_k(r) i k e^{ik\theta} \cos(2\theta) \frac{r}{2b^2} \right) \quad (6.25)$$

Ces expressions analytiques vont pouvoir être utilisées pour calculer la force exercée par chaque mode le long de la trajectoire. On se placera pour cela dans la limite de coefficients constants, *i.e.* $\bar{h}_k(t) = h_k^0$.

Pour simplifier ces expressions, on ne sélectionne que les modes d'amplitude les plus élevées, *i.e.* J_0 et J_4 . Dans ce cas, la force exercée par les ondes sur la goutte s'exprime sous la forme :

$$\text{Pour } J_0 : \quad F_m = h_0 J'_0(r) \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \quad (6.26)$$

$$\text{Pour } J_4 : \quad F_m = h_4 J'_4(r) \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 4h_4 J_4(r) \left(\frac{r}{r_0} \right) \left(2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^4 - 1 \right) \quad (6.27)$$

selon la direction normale à la trajectoire. Selon la direction tangente, on se contentera de la contribution du mode J_0 :

$$\text{Pour } J_0 : \quad F_p = -h_0 J'_0(r) \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^4} \quad (6.28)$$

La figure 6.8 présente la force exercée le long d'une lemniscate par un champ d'onde reconstitué, dans la limite haute mémoire ($Me = 200$). Cette force a été décomposée également en une composante tangentielle (a et b) et une composante normale (c et d). Les points expérimentaux sont représentés en rouge, ils correspondent à une mesure du gradient du champ h par reconstitution directe du champ,

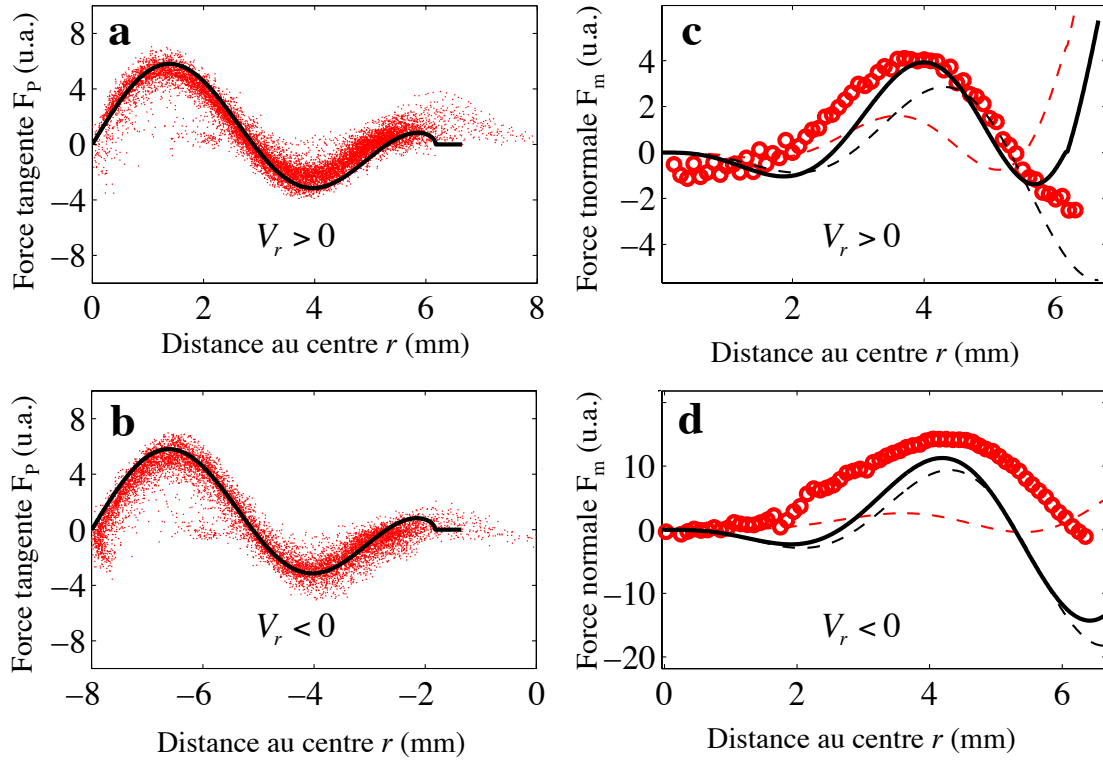


FIGURE 6.8 – **Force ondulatoire exercée le long d’une lemniscate.** Les points rouges correspondent à une mesure de la force exercée par les ondes sur la goutte le long d’une trajectoire en lemniscate expérimentale, par méthode de reconstitution du champ d’onde. Les courbes noires correspondent au calcul de la force exercée par les premiers modes de Bessel le long d’une lemniscate théorique $r^2 = 2b^2 \cos(2\theta)$ avec $b = 0.82$. a) Composante tangentielle F_p pour $V_r > 0$. Courbe théorique calculée à partir de l’équation 6.28 générée par un mode J_0 centré b) Composante tangentielle F_p pour $V_r < 0$. Courbe théorique donnée par l’équation 6.28. c) Composante normale F_m pour $V_r > 0$. Courbe théorique calculée à partir des équations 6.26 et 6.27, correspondant à un mode J_0 d’amplitude $h_0 = 2.6$ et un mode J_4 d’amplitude $h_4 = 7$, pour un marcheur s’éloignant du centre ($V_r > 0$). Le ratio des amplitudes correspond à la proportion de l’intensité des modes J_0 et J_4 présentée en figure 4.11d. d) Composante normale F_m pour $V_r < 0$. Courbe théorique calculée à partir des équations 6.26 et 6.27, correspondant à un mode J_0 d’amplitude $h_0 = 12.6$ et un mode J_4 d’amplitude $h_4 = 7$, pour un marcheur allant vers le centre ($V_r < 0$). La description par un champ statique ne semble alors plus pertinente.

à partir de la trajectoire expérimentale observée. Les courbes noires représentent la contribution des modes J_0 et J_4 , donnée par les équations 6.26, 6.27 et 6.28.

Pour le bilan tangential, seule la composante J_0 contribue significativement au bilan, comme le montre les figures 6.8a et b, respectivement pour un mouvement d'éloignement du centre ($V_r > 0$) et de rapprochement vers le centre ($V_r < 0$). Un excellent accord est obtenu.

Pour le bilan de force selon la direction normale, le bilan est moins clair. Les modes J_0 et J_4 contribuent significativement à la force exercée. La forme obtenue est tout de même voisine de la courbe expérimentale observée. L'amplitude relative du mode J_0 est observée plus faible que celle de J_4 au chemin aller (figure 6.8c), et plus élevée au chemin retour (figure 6.8d). Le modèle de coefficient constant h_0 et h_4 atteint donc ici ses limites. Pour décrire la dynamique, il faudrait inclure des coefficients h_0 et h_4 variable dans le temps.

En revanche, la contribution des autres modes est négligeable. Le mode J_2 en particulier, qui présente les mêmes symétries que la trajectoire suivie, n'est pas excité. Cette non excitation du mode J_2 est à mettre en parallèle de la non excitation du mode J_0 dans le cas des trajectoires circulaires.

Derrière ce bilan de la force exercée par les modes, se cache probablement un principe de minimisation du champ d'onde global excité le long de la trajectoire. Une approche variationnelle du champ généré le long d'une trajectoire serait une perspective intéressante.

6.4 Bilan de force le long d'un ovale de Cassini

On se propose dans cette section d'appliquer le formalisme ci dessus au cas d'une perturbation périodique d'une orbite circulaire. La technique consiste à effectuer un développement perturbatif de la force générée par les ondes en fonction d'un petit paramètre : l'excentricité e de la trajectoire suivie. Ce résultat appliqué au cas d'une perturbation π périodique, permettra de montrer que les trajectoires circulaires se déforment en ovale de Cassini.

6.4.1 Perturbation d'une trajectoire circulaire

Pour perturber l'état d'équilibre, on développe l'expression du rayon r en fonction d'un petit paramètre $e \ll 1$:

$$r = r_0 + e^2 r_1(\theta) \quad (6.29)$$

Nous verrons que le choix d'un développement à l'ordre 2 en e permet de relier e à une définition géométrique de l'excentricité. La recherche de trajectoires fermées

impose juste que r_1 soit périodique. La projection du vecteur radial sur la normale à la trajectoire \vec{n} s'exprime alors :

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \cos \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \right) = \cos \left(\frac{e^2}{r} r_1'(\theta) \right) = 1 + O(e^4) \quad (6.30)$$

A l'ordre e^2 , la projection du vecteur radial sur la normale à la trajectoire reste donc égale à 1 :

$$V_0^2 \kappa = \omega^2 r - a_m \quad (6.31)$$

Pour obtenir l'expression de la courbure, le problème se ramène donc à l'expression de l'accélération a_m exercée par les ondes sur la goutte. Quid du champ généré par une telle trajectoire ?

6.4.2 Description du champ d'onde

Pour calculer explicitement la force exercée par les ondes sur la goutte à partir des équations 6.22 et 6.23, on effectue deux approximations supplémentaires. La première consiste à se placer dans la limite de rebonds continus, *i.e.* approximer la somme discrète de fonction de Bessel par une intégrale. La seconde consiste à considérer la limite de mémoire grande devant la période de l'orbite ($\text{Me}T_F \gg T$). Ces deux approximations sont détaillées ci dessous³.

Passage à la limite continue

Le passage à la limite continue permettra d'utiliser des résultats d'analyse portant sur les fonctions continues (intégrale, transformée de Fourier). Comme la distance entre deux rebonds est petite devant la longueur d'onde ($VT_F \approx 0,05\lambda_F$), la somme discrète de fonctions de Bessel peut en effet être approchée par une intégrale :

$$h(t) = h_0 \int_{-\infty}^t J_0(k_F ||\vec{r}(t) - \vec{r}(u)||) e^{-t/\text{Me}T_F} du \quad (6.32)$$

Cette expression a été introduite par A. Oza *et al.* pour décrire la dynamique d'un marcheur [65]. La décomposition en modes centrés des équations 6.17 et 6.18. Il vient :

$$\bar{h}(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_k J_k(\rho) e^{ik\phi} \quad (6.33)$$

$$\bar{h}_k[r](t) = \int_{-\infty}^t J_k(r) e^{-ik\theta} e^{(u-t)/\text{Me}} du \quad (6.34)$$

3. Notons que cette approximation continue a été utilisée au chapitre 4 pour le calcul du coefficient h_0 du potentiel ondulatoire.

Limite haute mémoire

Dans la limite d'une longueur de mémoire grande devant le périmètre de l'orbite suivie ($S_M > 2\pi\Lambda$), les expressions précédentes peuvent être simplifiées. Bien qu'il soit possible d'effectuer des calculs analytiques pour toute valeur de la mémoire, cette limite permet de simplifier les calculs. Dans cette limite, les coefficients \bar{h}_k de la décomposition en mode deviennent :

$$\bar{h}_k[r] = \int_{t-\text{Me}}^t J_k(r) e^{-ik\theta} du \quad \text{avec } M \rightarrow +\infty \quad (6.35)$$

Cette limite pose tout de même un problème de convergence. En effet, chaque source étant d'amplitude constante, l'amplitude totale augmente proportionnellement au paramètre de mémoire⁴. Une manière de résoudre le problème est de conserver une mémoire finie, en approximant la décroissance exponentielle de l'amplitude des ondes par une fonction porte : l'amplitude est constante égale à 1 pour $t - \text{Me} < u < t$ et nulle pour $u < t - \text{Me}$. Pour une trajectoire périodique, on utilisera donc l'expression suivante pour les coefficients \bar{h}_k :

$$\bar{h}_k[r] = \frac{\text{Me}T_F}{T} \int_0^T J_k(r(u)) e^{-ik\theta(u)} du. \quad (6.36)$$

Notons également qu'il s'agit là d'une approximation forte, puisque toutes les sources sont ici considérées d'amplitude égale.

Sous cette forme, les coefficient \bar{h}_k de la décomposition en mode deviennent *transformée de Bessel* d'ordre k de la trajectoire, où k correspond à l'index de la fonction de Bessel J_k considérée. On retrouve donc ici, sous une autre forme, une dualité onde particule : les coefficients du champ d'onde sont une visualisation dans un espace de Fourier de la trajectoire suivie.

6.4.3 Champ généré par une perturbation d'un cercle

Pour calculer explicitement les coefficients \bar{h}_k de la décomposition, on effectue le changement de variable $u \rightarrow \theta$, qui introduit un terme additionnel en $du/d\theta$, dépendant de la trajectoire suivie :

$$\bar{h}_k[r] = \frac{\text{Me}T_F}{T} \int J_k(r) e^{-ik\theta} \frac{du}{d\theta} d\theta \quad (6.37)$$

Pour un cercle de rayon R , on a simplement $du = R/V_0 d\theta$. Dans le cas général, il faut revenir à l'expression de $ds = V_0 du$ en coordonnées polaires :

$$ds^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 \quad (6.38)$$

4. La croissance de l'amplitude est expérimentalement limitée par une interférence destructive des sources le long des trajectoires stables

En utilisant l'expression du rayon perturbé donné par l'équation 6.29 on obtient la relation entre dr et $d\theta$:

$$dr = e^2 r_1'(\theta) d\theta \quad (6.39)$$

Où la dérivée de r_1 est prise par rapport à θ . L'expression de l'abscisse curviligne ds devient donc :

$$ds^2 = (r_0^2 + 2e^2 r_1 + e^4 r_1^2 + e^4 r_1'^2) d\theta^2 \quad (6.40)$$

Enfin, on obtient l'expression de $du/d\theta$ au premier ordre en e^2 comme :

$$V \frac{du}{d\theta} = r_0 + e^2 r_1 + O(e^4) \quad (6.41)$$

Finalement, l'expression des coefficients s'écrit :

$$\bar{h}_k[r] = \frac{1}{2\pi V_0} \int r J_k(r) e^{-ik\theta} d\theta + O(e^4) \quad (6.42)$$

L'expression de chacun de ces coefficients peut alors être développée explicitement au premier ordre en e^2 :

$$\bar{h}_k[r] = \frac{M}{2\pi V} \int_0^{2\pi} r_0 J_k(r_0) + e^2 r_1 (J_k(r_0) + r_0 J_k'(r_0)) + O(e^4) e^{-ik\theta} d\theta \quad (6.43)$$

$$\bar{h}_k[r] = \frac{M}{2\pi V} \left(r_0 J_k(r_0) + e^2 (r J_k(r))'|_{r=r_0} I_k(r_1) + \frac{e^4}{2} J_k''(r_0) I_k(r_1^2) \right) + O(e^4) \quad (6.44)$$

où $I_k(r_1)$ correspond au coefficient de Bessel d'ordre k de la décomposition de r_1 . Cette expression de la force exercée est valide pour toute trajectoire voisine d'un cercle, tant que l'amplitude de la perturbation reste faible devant le rayon de l'orbite. En pratique, nous allons voir que cette expression reste valide pour un paramètre d'excentricité relativement élevé ($e < 0.7$). Elle peut être appliquée à une perturbation quelconque d'une trajectoire circulaire, moyennant un calcul des coefficients $I_k(r_1)$ de la décomposition de la perturbation en transformée de Bessel.

6.4.4 Application au cas d'un ovale de Cassini

Si l'on recherche une trajectoire de type ovale, on peut choisir une perturbation π périodique pour r_1 :

$$r = r_0 \left(1 + \frac{e^2}{2} \cos(2\theta) + O(e^4) \right) \quad (6.45)$$

Dans ce cas, le coefficient $I_2(r_1)$ dans la décomposition en transformée de Bessel de la perturbation r_1 sera dominant. Ajouté à la contribution de r_0 au mode J_0 , il vient, à l'ordre linéaire en e^2 :

$$\begin{cases} \bar{h}_0 = \frac{Me}{2\pi V} J_0(r_0) \\ \bar{h}_2 = \frac{Me}{2\pi V} (r_0 J_2'(r_0) + J_2(r_0)) \end{cases} \quad (6.46)$$

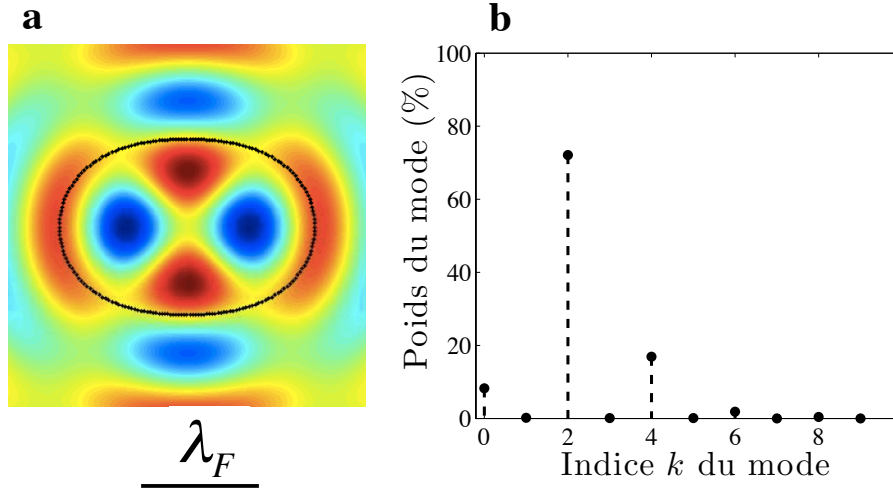


FIGURE 6.9 – **Décomposition en mode d'un ovale de Cassini** a) Ovale de Cassini obtenu pour $e = 0.6$ et $r_0 = 0.877$. Le champ d'onde associé à cette trajectoire, dans la limite $Me \rightarrow \infty$, a été superposé. b) Décomposition en modes du champ d'onde. Seul les coefficients pairs sont non nuls, compte tenu des symétries de la trajectoire suivie. Le mode 0 est quasi nul, puisque le rayon moyen r_0 est voisin du second zéro de J_0 . Le mode 2 est alors dominant, ce qui justifie l'approximation effectuée pour le calcul de la force exercée par le champ d'onde sur la trajectoire.

où \bar{h}_0 et \bar{h}_2 sont les coefficients respectifs de J_0 et J_2 dans la décomposition en mode. L'expression du champ $\bar{h}(\rho, \phi)$ généré en tout point s'écrit donc :

$$\bar{h}(\rho, \phi) = J_0(r_0)J_0(\rho) + \frac{e^2}{2}J_2'(r_0)J_2(\rho)\cos(2\phi) + O(e^4) \quad (6.47)$$

La force \vec{F} exercée par le champ d'onde sur le marcheur s'exprime sous la forme :

$$\vec{F}(r, \theta) = \begin{cases} -MCJ_0(r_0)J_1(r) - \frac{e^2}{2}MCJ_2'(r_0)J_2'(r)\cos(2\theta)\vec{u}_r \\ MCe^2J_2'(r_0)J_2(r)\sin(2\theta)\vec{u}_\theta \end{cases} \quad (6.48)$$

où (r, θ) correspondent aux coordonnées polaires de la position de la goutte. Cette force issue d'une perturbation π périodique en θ de la trajectoire reste donc π périodique. Inversement, la périodicité apparente de la trajectoire sera une signature des modes de champ associés. Une perturbation en ovale comme indiqué en figure 6.9a est une signature de la croissance d'un mode J_2 du champ.

Le terme d'ordre 0 en l'excentricité e correspond au potentiel généré par la trajectoire circulaire. La perturbation induit ensuite une force additionnelle selon le vecteur radial et selon la direction tangente déphasée de $\pi/4$ (apparition d'un terme en $\sin 2\theta$ à partir d'une perturbation en $\cos 2\theta$). Cette force orthoradiale ne pouvant être équilibrée par le potentiel central, elle doit probablement être à l'origine des

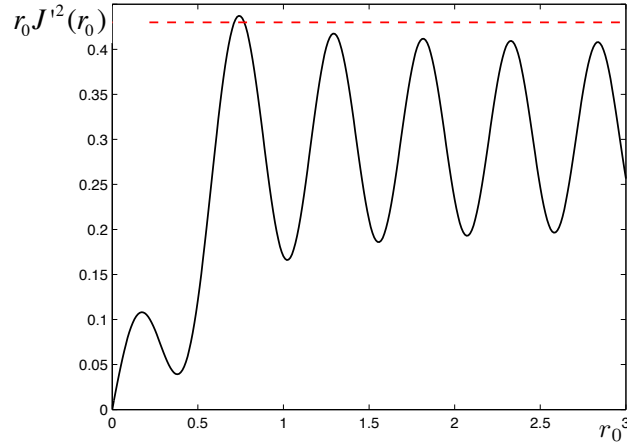


FIGURE 6.10 – Critère d'équilibre entre l'accélération centrifuge, la force centrale, et la force générée par les ondes. On se place dans la limite de mémoire grande devant le temps de parcours de l'orbite. L'équilibre des forces est vérifié pour tout θ lorsque $r_0(J_2'^2 + J_0 J_1') = (MC)^{-1}$ où Me est le paramètre de mémoire, C la constante de couplage entre la goutte et son champ d'onde, et J_2 la fonction de Bessel d'ordre 2. Pour une mémoire donnée, il existe plusieurs solutions possible, correspondant à des rayons r d'orbite différents. On peut tout de même noter que pour l'orbite $n = 1$ ($r \approx 0.37$), les solutions en forme de stade ne peuvent apparaître que pour des valeurs de mémoire bien supérieure.

précessions observées expérimentalement. En projetant la force de mémoire selon le vecteur normal on obtient à l'ordre 1 en e^2 :

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = -MC J_0(r_0) J_0'(r) - \frac{e^2}{2} J_2'(r_0) J_2'(r) MC \cos 2\theta + O(e^4) \quad (6.49)$$

Cette expression peut être combinée à l'équation (12) pour obtenir l'expression du rayon de courbure au premier ordre en e^2 :

$$\frac{\Omega}{R_c} = \left(1 - \tilde{M} J_0 J_1\right) \frac{r}{r_0^2} - \tilde{M} (J_2'^2 + J_0 J_1' - J_0 J_1) \frac{e^2}{r} \cos 2\theta + O(e^4) \quad (6.50)$$

où $\tilde{M} = r_0 MC$ correspond à la mémoire relative, *i.e.* en tenant compte de la constante de couplage entre la goutte et son champ d'onde, et de la longueur de la trajectoire proportionnelle à r_0 . On en déduit ainsi le développement du rayon de courbure au voisinage d'une orbite circulaire. Cette expression est à mettre en parallèle de la courbure d'un ovale de Cassini qui s'exprime simplement :

$$\frac{1}{R_c} = \frac{r}{r_0^2} + \frac{e^2}{r} \cos 2\theta \quad (6.51)$$

Le développement fait intervenir des termes équivalents, montrant que les ovales de Cassini sont bien solutions de l'équation 6.9 à l'ordre 1 en e^2 . Ce développement

présente l'avantage de n'avoir pas eu à développer le rayon de courbure, dont l'expansion est obtenue comme un résultat du calcul. L'ensemble des approximations portent donc sur le développement de r , et de la force générée par les ondes qui lui est associée. Même en ayant effectué une troncature des termes d'ordre supérieur, cette expansion permet bien d'observer une inversion de courbure pour e de l'ordre de 0.7.

Enfin, en identifiant les termes du développement avec l'expression de la courbure d'un ovale de Cassini, on peut en déduire des critères sur la pulsation Ω nécessaire pour que le bilan moyen soit vérifié, et sur la relation entre la mémoire Me et r_0 permettant d'observer des ovales :

$$\Omega = 1 - \tilde{M} J_0 J_1 \quad (6.52)$$

$$r_0 \left(J_2'^2(r_0) + J_0(r_0) J_1'(r_0) \right) = \frac{1}{MC} \quad (6.53)$$

La reconstitution numérique d'un ovale de Cassini permet également de calculer la décomposition en modes centrés du champ généré par ce type de trajectoire. La figure 6.5 présente un ovale de Cassini d'excentricité $e = 0,6$ et de rayon moyen $r_0 = 0,87$ (a) et la décomposition en modes centrés qui lui est associé (b). On remarque que la composante du mode J_2 est largement dominante sur les autres.

Ce second critère peut être représenté graphiquement. Le membre de gauche de l'équation 6.53 peut être tracé en fonction de r_0 . Pour une mémoire donnée, les trajectoires en ovales sont obtenues par l'intersection de cette courbe avec une droite d'équation $y = 1/(MC)$ (pointillés rouge). Ces trajectoires apparaissent donc à mémoire intermédiaire, mais aucun ovale n'est solution dans la limite de mémoire infinie. Ceux ci vont donc se déstabiliser au fur et à mesure que le champ d'onde associé se construit. Ce type de courbe donne donc un des prémices d'une transition vers des états chaotiques lorsque le paramètre de mémoire devient grand.

Ce critère reste valide tant que les termes d'ordre 4 en e sont négligeables. Ces termes sont nombreux et montrent que les ovales de Cassini ne sont vraisemblablement pas des solutions exactes de l'équation 6.9. Leur origine est variée : projection des forces selon l'axe normal, ordre supérieur de la force exercée par le mode J_2 , et couplage avec les autres modes de champs comme J_4 , ce qui rend difficile de donner une limite de validité du développement perturbatif en puissance de e .

6.4.5 Vérification expérimentale

Une manière de vérifier la validité de ce développement est d'effectuer une étude numérique sur un ovale de Cassini. Pour cela, on exprime la distance au centre et

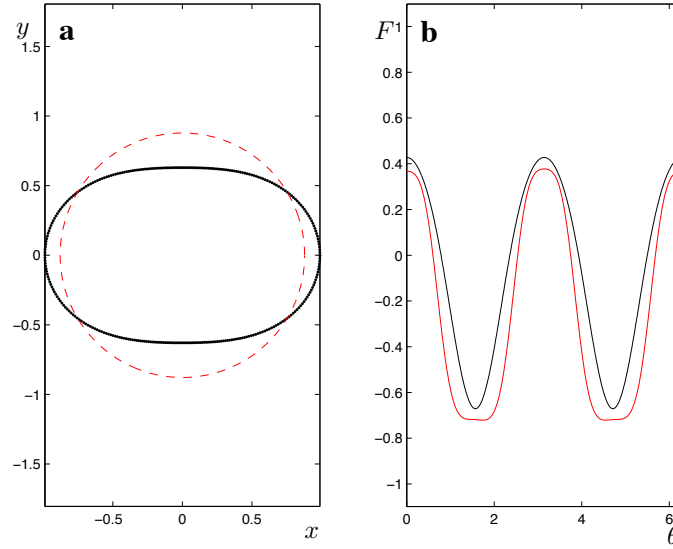


FIGURE 6.11 – **Bilan de force le long d'un ovale de Cassini.** a) Trajectoire en ovale de Cassini, pour $e = 0.6$ et $r_0 = 0.83$ (ligne noire), et cercle correspondant au niveau $n = 2$ (pointillés rouge). b) A partir de l'expression en coordonnée polaire de la trajectoire, on calcule $F_{low} = 1/R_c + r$ (courbe noire) et l'accélération dues aux ondes associée à cette trajectoire $\vec{a}_m \cdot \vec{n}$ selon la direction normale à la trajectoire (courbe rouge). Lorsque le rayon moyen vaut $r_0 \approx 0,83$, le bilan des forces est vérifié. Pour d'autres tailles de rayon, il n'existe plus de valeur de la constante de raideur tel que l'équilibre des forces soit assuré.

le rayon de courbure d'un ovale en coordonnée polaire en fonction de l'extension spatiale moyenne r_0 et de l'excentricité e de la trajectoire. Ce premier terme est ensuite à mettre en regard avec la force générée par les ondes. Celle ci est calculée à partir de la trajectoire en utilisant la technique de sommation présenté ci dessus. Pour un ovale d'extension spatiale proche du second zéro de J_0 , *i.e.* $r_0 \approx 0.87$, la figure 6.11 présente le bilan de force local le long de la trajectoire. En b), la courbe noire représente la somme de la contribution de la courbure et de la force centrale, et la courbe rouge représente la force dues aux ondes. Les deux sont tracées en fonction du θ qui paramétrise la trajectoire. L'accord quantitatif entre les deux valident le bilan de force le long d'un ovale de Cassini. On peut tout de même remarquer que les crêtes correspondant à $\theta = \pi/2$ et $3\pi/2$ sont plus large pour la force dues aux ondes. Ce phénomène s'amplifie lorsqu'on augmente l'excentricité, et donne une limite de validité de ce modèle autour de $e = 0.7$. Cette valeur correspond également à la valeur limite au delà de laquelle le sens de la courbure peut s'inverser.

6.5 Conclusion

L'étude des trajectoires composant les états propres a mis en évidence une caractérisation géométrique simple. La lemniscate et les ovales observés correspondent à des courbes de Cassini, définies comme le lieu des points tels que le produit de la distance à deux points fixes est constantes. Cette définition peut être étendue à trois points pour le cas du trifolium.

L'émergence de ces courbes de Cassini provient d'une autre de leur propriété, la courbure locale de ces trajectoires. Ces courbes émergent de la contrainte de vitesse associée qui est imposée par la propulsion des ondes. La géométrie des états propres observés est donc une autre conséquence de l'entretien du mouvement par les ondes.

Dans le cas d'une perturbation d'un cercle, on peut montrer que la force induite par les ondes amène à l'équation des ovales de Cassini observés expérimentalement.

La sélection des symétries des trajectoires est liée à l'excitation de modes de Bessel non axisymétriques, comme le mode J_2 dans le cas des ovales, ou le mode J_4 pour la lemniscate. L'émergence de telle ou telle symétrie, pour le champ comme pour la trajectoire, reste cependant un problème ouvert.

La non excitation du mode J_2 pour une lemniscate rappelle la non excitation du mode J_0 pour les orbites circulaires, qui a été mise en évidence au chapitre 4. Ce caractère de non excitation pour deux types d'états propres suggère une piste d'exploration future de la dynamique : raisonner sur un critère de minimisation du champ excité le long des trajectoires pour obtenir les équations dynamiques des orbites stables. Cette approche permettrait de définir une forme de principe de moindre action couplant un mobile ponctuel et une onde, via la mémoire de chemin.

Chapitre 7

Modes propres d'un marcheur libre

Le confinement d'un marcheur dans un puits de potentiel central a révélé un jeu d'états propres, dont les propriétés à grande mémoire ne dépendent plus du confinement initial qui a pourtant permis de les observer. Ce comportement quelque peu contre-intuitif est la conséquence de l'interaction entre la goutte et son propre champ d'onde, via la mémoire de chemin. Peut-on observer ces états propres en l'absence totale de force extérieure ?

Le marcheur étant sensible à la trajectoire précédemment suivie, il est peut-être possible de le piéger dans un mode non propagatif de ce type en préparant un champ d'onde initial. Ce chapitre est consacré à un mode en particulier, le cercle du premier niveau d'extension ($n = 1$).

Pour observer un tel mode, il est possible de tirer parti du dispositif magnétique afin de réaliser un confinement initial. Ce confinement permet de préparer le marcheur le long d'une trajectoire circulaire, ce qui donnera une condition initiale pour le champ d'onde associé. En relâchant toute contrainte, est-il possible de conserver le marcheur le long d'une trajectoire circulaire ? Faisons l'expérience.

7.1 Préparation d'une condition initiale

Pour préparer une condition initiale non rectiligne pour le marcheur, il est possible d'appliquer un confinement par un potentiel magnétique extérieure. Le dispositif doit cependant être adapté afin de pouvoir annuler la force de confinement à un instant donné.

7.1.1 Dispositif Expérimental

L'adaptation du dispositif magnétique présenté au chapitre 2 est illustrée en figure 7.1. Les bobines de Helmholtz ont été conservées afin d'appliquer un champ

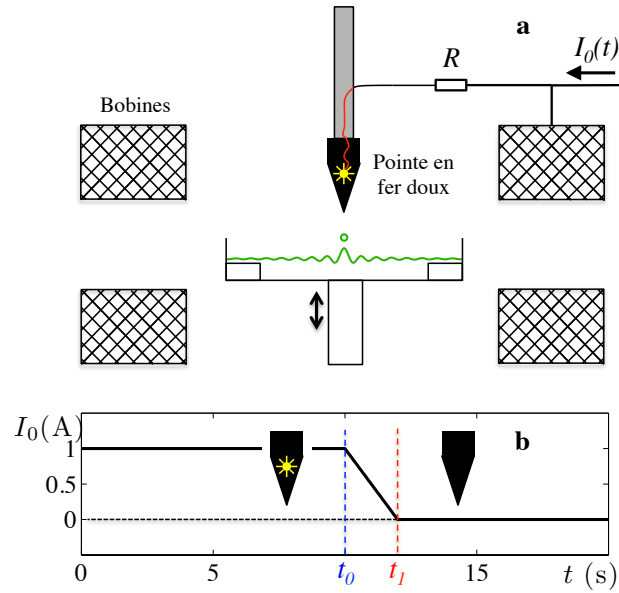


FIGURE 7.1 – **Dispositif de relaxation du confinement magnétique.** a) L'aimant permanent est remplacé par une pointe en fer doux, matériau ferromagnétique à aimantation nulle pour un champ nul. Le confinement du marcheur est alors généré uniquement par le courant I_0 qui parcourt les bobines, engendrant à la fois un champ magnétique homogène B_0 et des gradients de champ au voisinage de la pointe qui attire la goutte de ferrofluide. Ce dispositif permet de relaxer le confinement en coupant le courant parcourant les bobines. Une diode montée en parallèle des bobines permet de visualiser directement la coupure du champ. b) Signal typique du courant I_0 au cours du temps. A un instant t_0 , le courant I_0 dans les bobines est diminué jusqu'à atteindre une valeur nulle à un instant t_1 ultérieur. Le temps typique de descente est d'une seconde. La signature de la coupure peut être visualisé directement sur les enregistrements, grâce à la diode montée en parallèle des bobines. Celle ci s'éteint pour $I_0=0,4A$.

magnétique vertical homogène constant \vec{B}_0 . En revanche, l'aimant permanent qui attirait la goutte a été remplacé par une pointe en fer doux. Ce matériau présente la particularité de posséder une grande susceptibilité magnétique χ_0 , tout en étant paramagnétique : l'aimantation d'un barreau de fer doux est nulle à champ magnétique nul. Dès qu'un champ magnétique extérieur est appliqué, la pointe en fer doux concentre les lignes de champ dans son voisinage et crée alors un gradient radial de champ magnétique. Une goutte contenant du ferrofluide et plongée dans le champ d'une telle pointe peut donc être confinée. Comme pour le cas d'un aimant, la force de confinement peut être modulée en jouant sur la distance d entre la pointe et la surface du bain. Notons que la force exercée ici n'est plus nécessairement harmonique. Cependant, dans la limite d'un mouvement circulaire autour de l'axe de symétrie de la pointe, les deux montages sont parfaitement analogues. Une calibra-

tion de la force exercée peut également être obtenue en mesurant la courbe du rayon de l'orbite en fonction de la distance d entre la pointe et la surface de liquide.

Avec un tel dispositif, le courant I_0 parcourant les bobines sert à la fois à générer le champ magnétique homogène B_0 et le gradient de champ radial. Il est donc maintenant possible d'annuler toute force extérieure en coupant le courant I_0 traversant les bobines. Pour réaliser de tels régimes transitoires, le courant électrique est contrôlé numériquement. Les valeurs de courant utilisées ($0 < I_0 < 1$ A) nécessitent d'utiliser un amplificateur de signaux continus et alternatifs.

Le type de transitoire retenu est une rampe de courant allant de $I_0 = 1$ A à $I_0 = 0$ pour des temps de transitoire compris entre 0.1 et 5 secondes suivant les expériences. La caméra peut être synchronisée avec le signal de courant envoyé, pour repérer l'instant de coupure du champ. En pratique il est plus simple de visualiser directement dans le champ de la caméra la coupure du champ magnétique. Pour cela, une diode électroluminescente (DEL) a été montée en parallèle des bobines (voir figure 7.1). Fixée à la pointe en fer doux, elle est alors visible directement dans le champ de la caméra. Lorsque le courant I_0 traversant les bobines est coupé, la force exercée s'annule et le voyant lumineux s'éteint.

Pour étudier la limite de confinement nul, on se place dans une configuration initiale correspondant au cercle du niveau $n = 1$ dont le rayon R vaut $0.37\lambda_F$. A un instant t donné, cette contrainte est relâchée : le marcheur se retrouve soudainement *libéré* : soumis à aucune force extérieure, il peut néanmoins subir l'interaction avec les ondes qu'il émet lui même. Là encore, le comportement d'un marcheur dans une telle situation dépendra de la longueur de mémoire. A mémoire faible, le mouvement d'un marcheur, dit *amnésique* ne dépendra pas de l'état initial préparé. En revanche, à mémoire plus élevée, la trajectoire circulaire initiale suivie devrait avoir une influence sur le mouvement futur du marcheur libéré.

7.1.2 Observations

Le dispositif expérimental ainsi adapté permet donc d'étudier le mouvement d'un marcheur après relaxation de toute contrainte extérieure. A ce stade, il ne reste donc plus qu'un marcheur en milieu libre, seul avec sa mémoire de chemin. Deux cas de figures extrêmes ont alors été considérés. Le premier consiste à partir d'une orbite obtenue avec un marcheur *amnésique*, *i.e.* dont le temps de mémoire est court devant la période de l'orbite initiale ($Me = 10$). Le second cas consiste à partir d'une orbite circulaire quantifiée au niveau $n = 1$ ($R = 0.37$) obtenue à très haute mémoire ($Me = 136$). Les trajectoires obtenues avant et après la coupure du champ magnétique sont représentées en figure 7.2. La figure 7.2a) présente la trajectoire obtenue pour un marcheur amnésique ($Me = 10$). La trajectoire initiale,

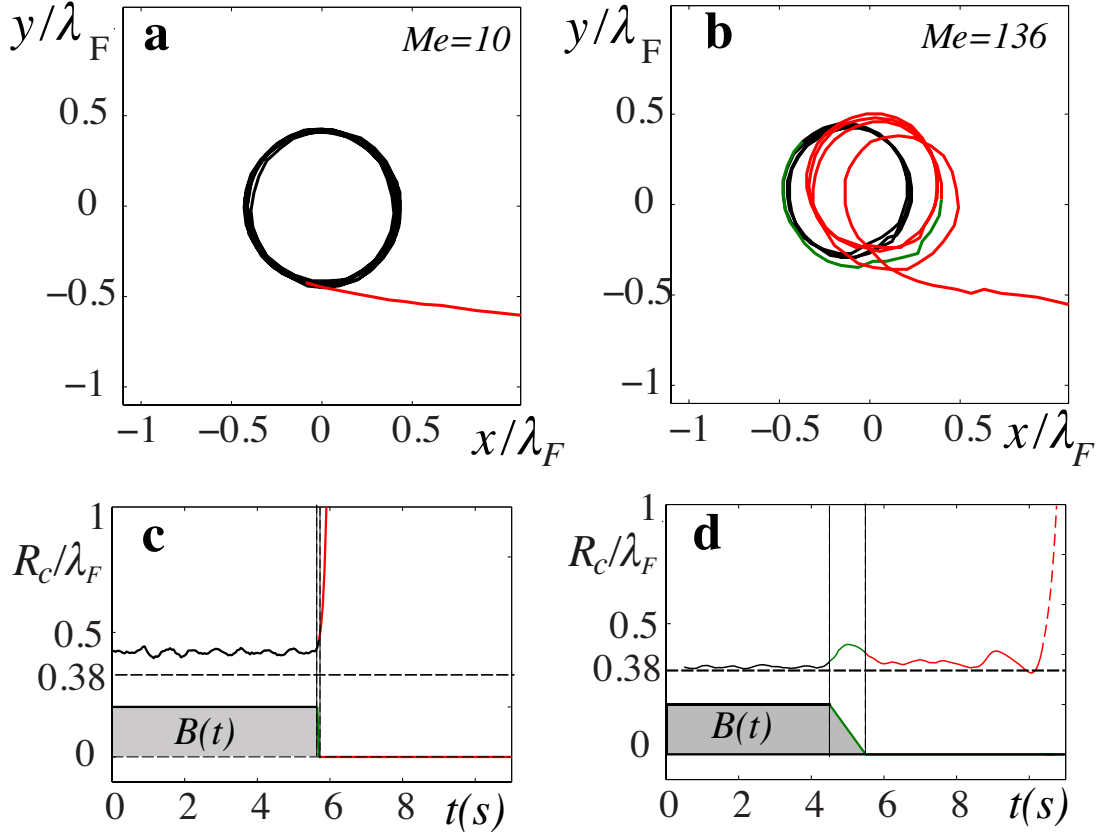


FIGURE 7.2 – **Réponse du marcheur à une relaxation du confinement.** Comparaison du comportement à basse mémoire $Me=10$ (a et c), et à haute mémoire (b et d). a) Trajectoire expérimentale obtenue lors d'une coupure du champ dans le cas d'un marcheur *amnésique*. Dès la coupure du champ, le marcheur suit une trajectoire rectiligne uniforme. b) Trajectoire obtenue lors d'une coupure du champ à haute mémoire, pour un état initial circulaire stable (noir). Après un arc de cercle durant le régime transitoire (vert), le marcheur est piégé par le champ d'onde réminiscent dans une orbite circulaire de taille comparable. c) et d) Analyse du rayon de courbure de la trajectoire au cours du temps, respectivement à basse et à haute mémoire. Ce comportement met en évidence qu'un marcheur peut rester piégé sous l'action unique de son propre champ.

avant coupure du champ, est représentée en noir, l'évolution ultérieure à l'arrêt de la force a été colorée en rouge. Dès la disparition d'une force extérieure appliquée sur le marcheur, la goutte suit une trajectoire rectiligne uniforme.

La même expérience effectuée à une mémoire élevée ($Me = 136$) présente un résultat tout autre (figure 7.2b). Lors de la coupure du champ, la trajectoire se décale légèrement par rapport à son orbite initiale (courbe verte). Après coupure, le marcheur est piégé dans une trajectoire circulaire proche de l'orbite initiale après un court régime transitoire. Le mouvement d'un marcheur *libéré* n'est donc pas nécessairement rectiligne uniforme. Une orbite circulaire est donc un autre mode possible de propagation d'un marcheur libre.

Ces trajectoires peuvent être analysées en terme d'évolution du rayon de courbure. Les figures 7.2c) et d) présentent de tels enregistrements, respectivement pour l'orbite obtenue à basse, et à haute mémoire (figure 7.2a) et b)). Le cas de faible mémoire met en évidence que pour un marcheur amnésique, le rayon de courbure diverge rapidement après coupure du champ magnétique.

La figure 7.2d) révèle au contraire un comportement différent. Après un léger accroissement du rayon de courbure lors du transitoire d'arrêt (partie verte), celui ci reconverge vers une valeur proche du rayon de courbure initial, même en l'absence de force extérieure. La durée cette auto-orbite est de l'ordre de 5 secondes. Lorsque l'expérience est répétée de nombreuses fois, le temps moyen d'auto-orbite se situe autour de 3.5 secondes après coupure du champ, pour des réalisations individuelles allant de 2 à 5 secondes. Comment se compare ce temps caractéristique avec le temps de mémoire ?

Pour les besoins de cette expérience, le temps d'amortissement des ondes a été mesuré *in situ* sur les enregistrements vidéo de trajectoire en mode ondulatoire (visualisation du champ d'onde, voir chapitre 2). Une image typique de la goutte entourée par son champ d'onde, après coupure du champ, est donnée en figure 7.3. La méthode de mesure utilisée est présentée à la fin du chapitre 2.

Le principe consiste à mesurer au cours du temps l'évolution du contraste induit par les ondes de Faraday générées par la goutte. Lorsque le marcheur s'échappe du champ de vision, cette amplitude décroît exponentiellement au cours du temps. Le temps caractéristique de décroissance donne alors une mesure directe du temps d'amortissement des ondes $\tau = 3,4 \pm 0,15s$, et donc du paramètre de mémoire $Me = 136 \pm 6$. Ce temps est à comparer à la durée du régime d'auto-orbite après coupure de la force extérieure, allant de 2 à 5 secondes.

Dans le cas présenté en figure 7.3, la goutte s'est donc échappée de l'auto-orbite lorsque l'amplitude du champ d'onde réminiscent, généré avant l'arrêt du champ magnétique, était seulement de 20% de sa valeur initiale. La majeure partie du champ d'onde a donc progressivement été générée après coupure de la force exercée. La

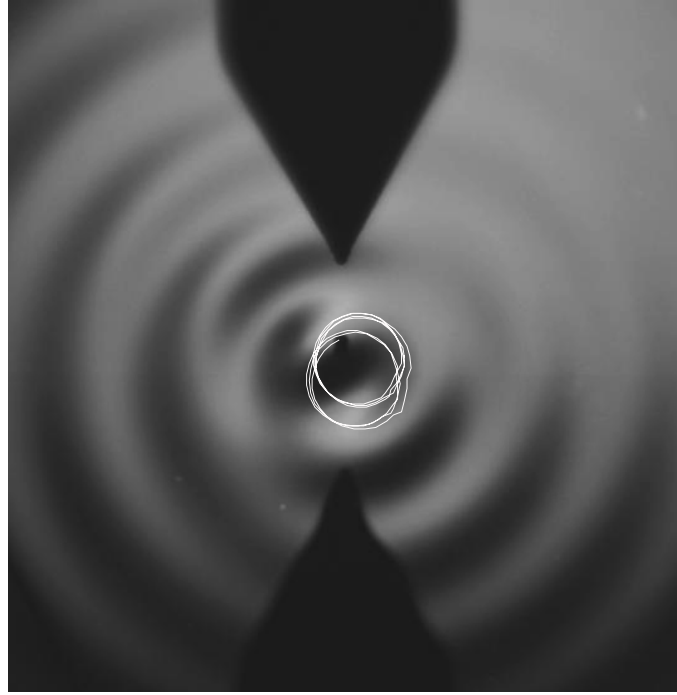


FIGURE 7.3 – **Marcheur pris en flagrant délit d'auto-orbites.** Photographie d'un marcheur, 4 secondes après la coupure du champ magnétique. L'éclairage en point de vue "ondulatoire" met en évidence la structure circulaire du champ d'onde généré par la trajectoire passée du marcheur (blanc). Le mouvement d'un marcheur libre peut donc être circulaire uniforme, durant un temps caractéristique supérieur au temps d'amortissement des ondes ($\tau = 3,4 \pm 0,15$ s)

goutte étant encore confiné il existe donc un mécanisme d'entretien, via la mémoire, de la trajectoire circulaire d'équilibre initialement suivie. Pour une condition initiale donnée, le mécanisme de mémoire est donc suffisant pour propager l'information à un temps ultérieur, et maintenir la goutte dans une orbite circulaire. D'où peut alors provenir cette limite finie de temps de stabilité ?

7.1.3 Simulations numériques

Afin d'explorer la limite de stabilité de ces orbites circulaires, l'étude expérimentale a été complétée par des simulations numériques. Celles-ci ont été effectuées par Matthieu Labousse. Leur implémentation est basée sur le modèle de Fort qui traduit en simulations numériques les équations discrètes du mouvement d'un marcheur présentées au chapitre 1. Nous utiliserons ici ces résultats pour présenter la raison probable de limite de stabilité expérimentale des auto-orbites.

Le modèle de simulation utilisé, rappelons le, se base sur une dynamique simplifiée. Celle-ci consiste à considérer un mouvement vertical indépendant du mouvement horizontal. La goutte est donc considérée comme parfaitement synchronisée en phase

avec les ondes qu'elles génèrent à chaque impact. A chaque rebond, une onde circulaire est ajoutée. Le champ d'onde total est obtenu par sommation des amplitudes de toutes les ondes générées. Chaque onde individuelle est amortie exponentiellement avec un temps caractéristique τ , le temps de mémoire. La goutte subit alors un incrément de quantité de mouvement à chaque rebond qui est proportionnel à la pente de l'interface au point d'impact.

L'expérience numérique analogue consiste à simuler une trajectoire circulaire dans un champ de force central, puis à couper celui-ci. Après coupure du champ, le comportement du marcheur *libéré* peut alors être analysé. A faible mémoire ($Me = 10$), on retrouve un mouvement rectiligne uniforme dès qu'aucune force extérieure n'est plus appliquée sur la goutte. Pour une mémoire plus élevée ($Me > 30$), une trajectoire circulaire de rayon $R = 0,37$ est initialement préparée. Après coupure du champ, la trajectoire du marcheur suit une auto-orbite de rayon proche de $R = 0,37$, présentant seulement une lente dérive dans l'espace. La position de l'orbite n'est donc pas fixée, mais le moment angulaire reste quantifié, correspondant à une orbite $m = 1$. Cette simulation numérique montre qu'il est possible d'observer une auto-orbite indéfiniment.

Ajout d'une force aléatoire : conséquence sur la stabilité des auto-orbites

Pour comprendre la différence entre durée de vie expérimentale limitée et stabilité numérique parfaite, il est nécessaire d'ajouter un ingrédient supplémentaire dans le modèle de la dynamique d'un marcheur.

Une des limitations des simulations numériques antérieures provient d'une divergence lente entre les résultats expérimentaux et les simulations numériques lorsque la mémoire est augmentée.

L'origine de cet écart a été rapidement évoqué au chapitre 5, dans le cadre des trajectoires chaotiques. Nous avons vu que l'ajout d'un bruit sur chaque source d'onde, même de faible amplitude, pouvait induire une fluctuation importante de la force totale exercée par les ondes sur la goutte. Ce principe d'accumulation du bruit est une des conséquences de cette mémoire ondulatoire, où un nombre grandissant de sources, soumises au principe de superposition, demeurent actives à la surface du bain.

Cet effet de bruit ne provoque aucune différence significative entre expériences et simulations tant que $Me < 25$. Au delà, l'influence de ce léger bruit initial est perceptible par exemple sur les statistiques des régimes intermittents ou la largeur des plages de stabilité des différents états propres.

Une source de bruit doit donc être ajoutée dans les simulations numériques, en particulier pour l'étude de la stabilité des auto-orbites. Plusieurs manières d'appli-

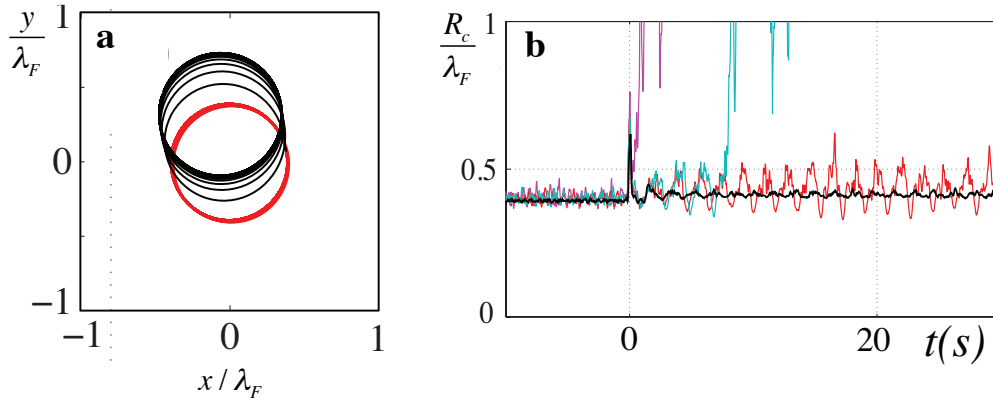


FIGURE 7.4 – **Influence du bruit sur la stabilité d'une auto-orbite.** a) Orbite obtenue par simulation numérique, après coupure de la force exercée à $t = 100$ s après le début de l'expérience. Trajectoire avant (rouge) et après (noir). On observe une reconvergence vers une orbite circulaire de rayon voisin après un bref transitoire. b) Influence du bruit sur la stabilité d'une auto-orbite. Un bruit d'amplitude ϵr_k a été ajouté sur la position de chaque source avec $\epsilon = 2 \times 10^{-2}$ (rose), 1.6×10^{-2} (vert), 1.2×10^{-2} (rouge) et 4×10^{-3} (noir) en amplitude relative. Le rayon de courbure R_c est représenté en fonction du temps dans ces quatre cas de figures. La limite de stabilité est observée pour $\epsilon = 0.015 \pm 0.003$ à $Me = 30$.

quer un bruit peuvent être envisagées. Il a été retenu d'ajouter un léger bruit sur la position d'atterrissage de la goutte à chaque rebond. Cela revient à ajouter une composante aléatoire $\vec{\xi}(t)$ sur la position $\vec{r}_k(t)$ de chaque rebond :

$$\vec{r}_{k+1}(t) = F(\vec{r}_k) + \vec{\xi}(t) \quad (7.1)$$

où F est l'opérateur décrivant l'évolution déterministe du système. F inclut donc la force due aux ondes, la friction avec le bain et la force extérieure éventuelle. $\vec{\xi}(t)$ représente en revanche une force stochastique, qui est définie par des propriétés statistiques. On choisit une valeur aléatoire $\vec{\xi}$ dans un disque de rayon ϵr_k où ϵ correspond à l'amplitude relative du bruit. Cette définition implique une dépendance spatiale de l'amplitude du bruit, mais qui n'est pas gênante pour des trajectoires non circulaires.

L'amplitude ϵ de ce bruit additionnel a été variée entre $\epsilon = 10^{-3}$ et $\epsilon = 0.02$. La stabilité de l'auto-orbite après coupure de la force extérieure peut alors être analysée en fonction de l'amplitude du bruit ϵ . Au delà d'une amplitude de bruit ϵ de l'ordre de 1.5%, il y a perte de stabilité de l'orbite circulaire $n = 1$ après un temps fini.

Ce résultat met en évidence la sensibilité au bruit d'une telle expérience, mais aussi la robustesse des auto-orbites vis à vis d'un bruit d'amplitude faible, mais non nul.

7.2 Origine de la stabilité des auto-orbites

L'existence et la stabilité de ces auto-orbites peuvent être analysées à partir de la décomposition en mode introduite au chapitre 4 et de la séparation entre bilan tangent et bilan longitudinal des forces appliquées sur la goutte. Dans la limite de trajectoire circulaires, ces bilans peuvent être considérés comme respectivement orthoradial et radial, se ramenant ainsi au cas d'un potentiel effectif ondulatoire à une dimension d'espace. Cette section présente ces deux bilans de force.

7.2.1 Bilan de force orthoradial

Selon la direction tangente au mouvement, la force exercée par les ondes assure la propulsion de la goutte. Qu'advient-il dans la limite de longueur de persistance grande devant le périmètre de l'orbite ?

La figure 7.5a présente un schéma du champ d'onde généré par la goutte le long d'une orbite circulaire. La composante axisymétrique du champ est donné par le mode J_0 qui produit une force uniquement radiale. Les autres modes en revanche participent au bilan orthoradial.

La force tangente au mouvement exercée par les ondes sur la goutte fait intervenir l'ensemble des modes J_k pour $k > 0$. Pour calculer cette force de propulsion en fonction de la mémoire, on revient donc directement à l'expression du champ global donné par l'équation 1.4.

Dans le cas d'une trajectoire rectiligne uniforme, le champ d'onde généré le long de la trajectoire est obtenu par sommation de sources le long d'une demi-droite. Dans la limite de longueur de persistance S_{Me} grande devant la longueur d'onde, il se forme une pente sous la goutte, un champ quasi nul devant, et un champ qui relaxe lentement à zéro derrière. Le résultat surprenant est que la force de propulsion tend vers une constante lorsque la longueur de persistance S_{Me} tend vers l'infini. Cet effet assure une vitesse constante pour la goutte.

Dans le cas d'une trajectoire circulaire comme celle décrite par un marcheur suivant le long d'une auto-orbite, ce résultat n'est pas modifié. La figure 7.5b présente la force exercée selon la direction tangente au mouvement, en fonction de la longueur de mémoire S_{Me} .

On observe une convergence rapide vers une valeur constante de F_p dès que la longueur S_{Me} est de l'ordre de la longueur d'onde λ_F . Notons que la courbure de la trajectoire induit une variation du second d'ordre de la force de propulsion, qui peut modifier légèrement la vitesse de la goutte (10 %) suivant la taille de l'orbite considérée.

Même à haute mémoire, la propulsion de la goutte le long d'une trajectoire

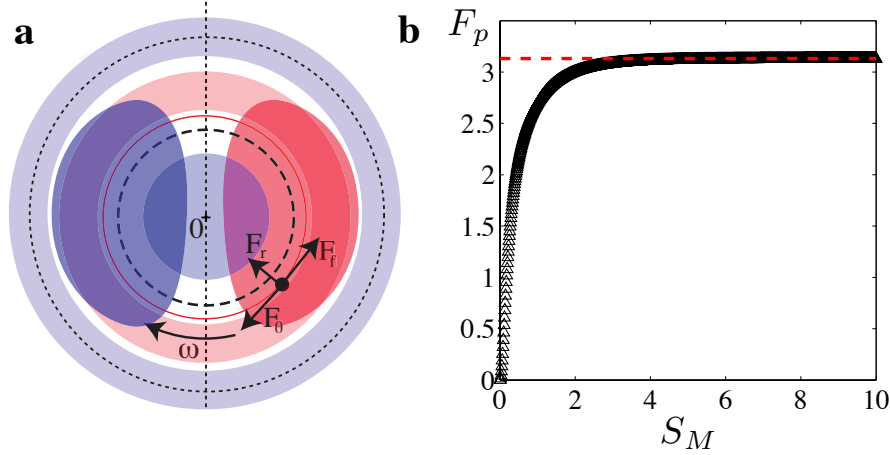


FIGURE 7.5 – **Schéma du champ d'onde et force propulsive exercée par les ondes sur la goutte.** a) Schéma du champ généré par la goutte le long d'une orbite circulaire. La composante axisymétrique du champ correspond à un mode J_0 dont l'amplitude est donné par le rayon de l'orbite. La force de propulsion exercée dépend des autres modes, en particulier le mode J_1 qui est antisymétrique. Celui ci tourne avec la goutte. b) Force propulsive résultante F_p en fonction de la longueur de mémoire S_{Me} , calculé à partir d'une trajectoire circulaire et de l'équation 1.4. Dès que $S_{Me} \approx 2\pi R$ est de l'ordre du périmètre de l'orbite suivie, la force de propulsion converge vers une constante, qui détermine la vitesse du marcheur.

circulaire est ainsi assurée. Qu'advient-il du rayon de l'orbite en l'absence de force extérieure ?

7.2.2 Bilan de force radial

Au fur et à mesure des tours, la goutte construit des modes de champ globaux correspondant aux fonctions de Bessel J_k . Le premier mode J_0 présente la particularité d'être axisymétrique. Son gradient orthoradial est donc identiquement nul, et il ne contribue en rien à la propulsion de la goutte. En revanche, il peut induire une force radiale comme nous l'avons vu au chapitre 4 et 6 avec la définition d'un puits de potentiel effectif de l'interaction goutte/onde. Ce mode J_0 induit en effet une force radiale $F_r \propto J_0(k_F R)J_1(k_F R)$ qui confine le marcheur au voisinage d'un zéro de J_0 , comme illustré sur la figure 7.6.

En présence d'une force centrale égale à l'accélération centrifuge, cette force due aux ondes peut être nulle, de sorte que le rayon de l'orbite suivie est égal à $R_1 = 0.37\lambda_F$ et que le mode J_0 n'est pas excité. Au voisinage de cette valeur de R_1 , la force radiale F_r peut être soit dirigée vers le centre ($R_1 > 0$ et $A_0 < 0$) soit vers l'extérieur ($R_1 < 0$ et $A_0 > 0$). Ce raisonnement a été introduit au chapitre 4, dans

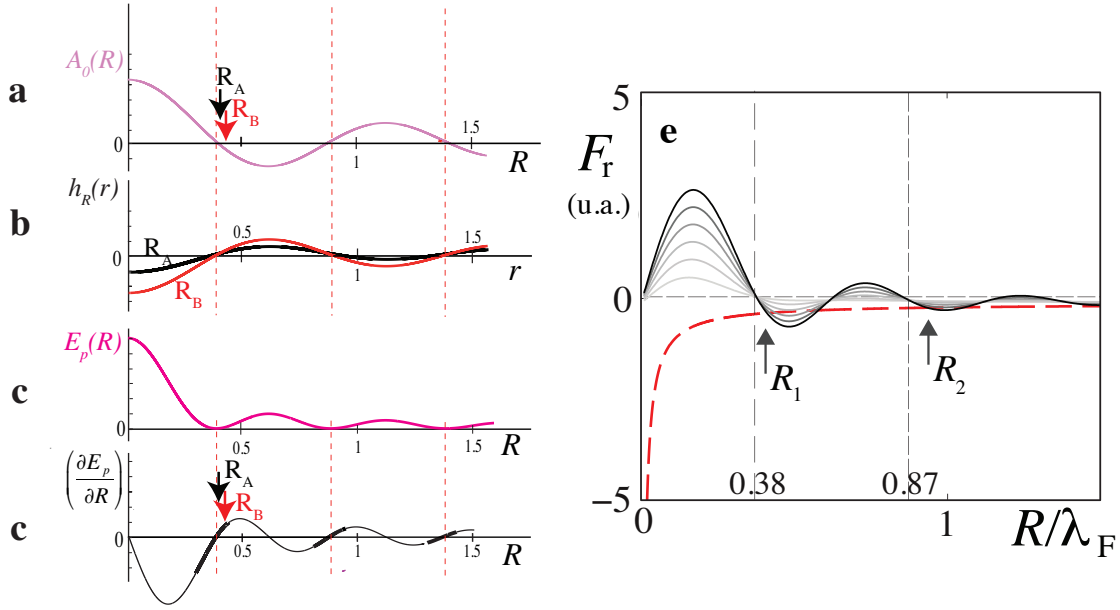


FIGURE 7.6 – **Force normale à la trajectoire exercée par les ondes sur la goutte.** a) Amplitude $A_0(R)$ de l'onde générée en fonction du rayon R de l'orbite suivie. b) Profil radial $h_R(r)$ du champ résultant pour deux rayons d'orbite R_A et R_B voisin de R_1 . c) Profil d'énergie correspondant $E_p(R) \propto J_0^2(R)$. d) Force exercée correspondante, qui permet de maintenir la goutte le long de son orbite. e) Force radiale F_r exercée par les ondes sur la goutte en fonction du rayon R de l'orbite considérée. La courbe rouge correspond à un équilibre entre la force exercée par les ondes et l'accélération centrifuge $a_c = V^2/R$. Il existe donc des solutions non rectilignes dès que l'amplitude du champ d'onde est suffisante pour compenser l'accélération centrifuge.

le cas d'une orbite circulaire en présence d'une force extérieure. Le raisonnement est repris sur la figure 7.6 en l'absence de force extérieure.

Lorsque la force extérieure est coupée, l'accélération centrifuge n'est plus équilibrée que par la force exercée par les ondes. Cette différence induit un décalage δR du rayon de l'orbite qui génère un champ d'onde axisymétrique J_0 d'amplitude non nulle pouvant égaler l'accélération centrifuge. En effectuant un bilan de force radial, δR est donc solution de l'équation :

$$CMeJ_0(R_1 + \delta R)J_1(R_1 + \delta R) = \frac{V^2}{R_1 + \delta R} \quad (7.2)$$

Avec $k_F = 1$, et C la constante de couplage entre goutte et champ. Dans la limite de grande mémoire, on a $CMeJ_1(R_1) \gg V^2/R_1$. L'augmentation δR du rayon s'exprime alors au premier ordre sous la forme :

$$\delta R = \frac{1}{CMe} \frac{V^2}{R_1 J_1^2(R_1)} \quad (7.3)$$

Le produit $Me\delta R$ est donc conservé. Le décalage de l'orbite sera donc d'autant plus

faible que la mémoire est élevée. A la limite $Me \rightarrow +\infty$, le décalage de l'orbite est nul.

Le léger incrément de rayon de l'orbite après coupure de la force extérieure est d'ailleurs observé expérimentalement, comme le montre une lecture attentive de la figure 7.2, en comparant la valeur de R pour $t < 4$ s et $t > 6$ s.

7.3 Conclusion

Ainsi, le premier mode de quantification en force centrale peut être observé pour un marcheur libre. Ce résultat a été obtenu en préparant un état circulaire, puis en relâchant le marcheur de toute contrainte. Le temps d'orbite est de l'ordre de quelques tours expérimentalement, mais peut être étendu *ad infinitum* en simulation numérique en diminuant l'amplitude du bruit. Cette limite de confinement nul permet de révéler par une mesure directe que le potentiel effectif ondulatoire défini au chapitre 4 est bien une propriété intrinsèque au marcheur : elle ne dépend plus de la perturbation extérieure qui lui est appliquée.

Ces auto-orbites forment ainsi une brique élémentaire de la dynamique d'un marcheur, et peuvent *a priori* être observées dans un grand nombre d'expériences faites sur des marcheurs, dès que la mémoire est élevée. La figure 7.7 présente deux exemples de dynamiques chaotiques obtenues pour $Me > 100$, dans le cas d'un puits de potentiel central (figure 7.7a) et dans le cas d'un marcheur plongé dans une cavité circulaire (figure 7.7b) qui impose des conditions aux bords pour le champ d'onde, et confine ainsi le marcheur [44]. Dans les deux cas, on retrouve la persistance de ces modes propres non propagatifs, pour deux forces extérieures appliquées d'origine très diverses.

L'existence de modes non propagatifs pour le mouvement d'une particule libre ne correspond pas au mouvement d'un point matériel isolé. Pour comprendre cette dynamique, il est donc nécessaire d'invoquer un couplage de la goutte avec son environnement. Dans le cas présent, ce couplage est assuré par la mémoire de chemin, qui permet de stocker de l'énergie sous la forme d'un champ d'onde entretenu par la vibration verticale du bain. Cette énergie peut ensuite être restituée à la goutte lors de son impact sur une surface inclinée. L'auto-orbite est donc un *mode propre mémoriel*, qui correspond à une manifestation de la non localité temporelle du marcheur.

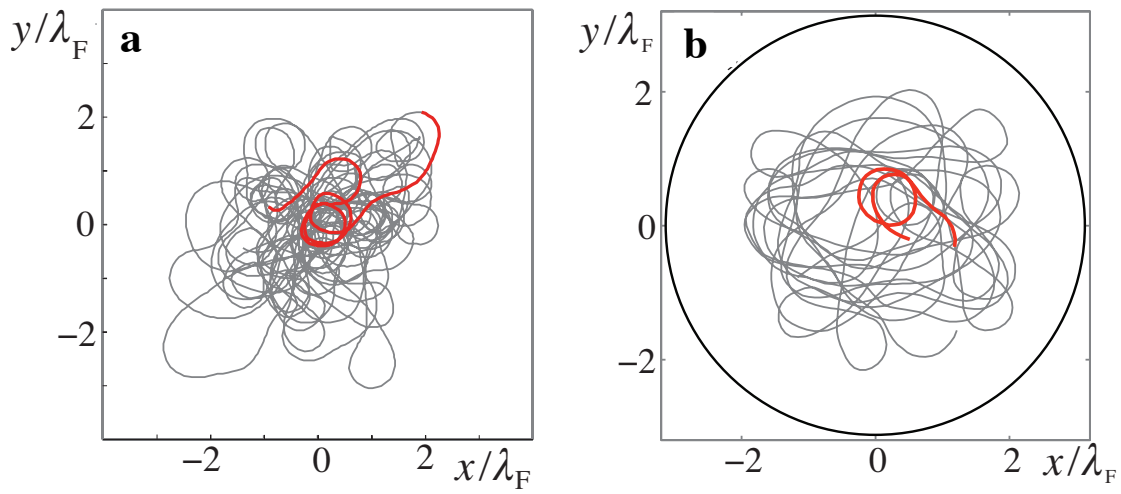


FIGURE 7.7 – **Observation d'auto-orbites dans une dynamique chaotique.** a) Trajectoire expérimentale obtenue à $Me \approx 500$ pour un marcheur confiné dans un puits de potentiel harmonique. On observe la présence d'un grand nombre de boucles élémentaires correspondant au mode propre $n = 1$, à des distances variées du centre. b) Trajectoire expérimentale obtenue à $Me \approx 100$ pour un marcheur confiné dans une cavité circulaire, qui impose des conditions aux bords pour le champ d'onde. De manière analogue, des boucles élémentaires décentrées sont observées au sein d'une dynamique chaotique.

Chapitre 8

Retournement temporel de la dynamique horizontale d'un marcheur

En physique, la symétrie par renversement du temps des équations sous l'action d'une transformation $t \rightarrow -t$ est une propriété générale des systèmes conservatifs. Appliquée aux ondes, cette invariance mène à des possibilités inattendues comme le miroir à conjugaison de phase en optique [89] ou le retournement temporel d'ondes acoustiques [38, 39]. Une des propriétés les plus remarquables dans ce domaine est la reconvergence d'une onde pulsée vers son lieu de focalisation, après qu'elle a été diffusée par un ensemble de réflecteurs d'onde [9].

Cette réversibilité des systèmes conservatifs est valable même dans le cas d'une dynamique chaotique [77]. Elle peut en principe être étendue au cas de systèmes non conservatifs sous certaines conditions, comme l'a montré théoriquement R. Dewdney [23]. Un système dynamique, pas nécessairement conservatif, est réversible s'il existe une transformation G dans l'espace des phases qui retourne le sens d'écoulement du temps et est aussi une involution. On entend par involution une transformation G qui, appliquée deux fois est égale à l'identité : $G \circ G = \text{Id}$.

Nous démontrerons dans ce chapitre que dans le cas d'un marcheur dont la dynamique est non conservative, l'application d'un saut de phase de π est une involution de ce type qui rend possible un retournement temporel du mouvement.

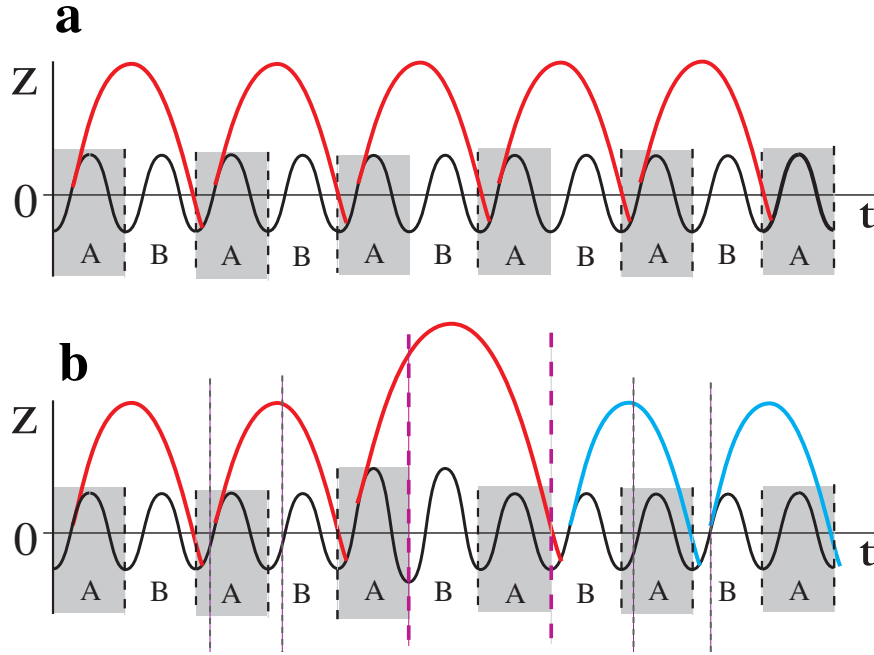


FIGURE 8.1 – **Rebond vertical et saut de phase provoqué.** a) Schéma du mouvement vertical de la goutte au cours du temps. Celle ci oscille à la même période T_F que les ondes de Faraday, égale au double de la période T_0 d'oscillation du bain. Il existe donc deux phases possibles du mouvement dont l'une seulement est représentée ici, celle où le contact a lieu lors de la phase A. b) Durant deux cycles d'oscillation du bain, l'amplitude d'excitation est augmentée, pour forcer un mouvement vertical de la goutte d'une durée de $3T_F$. La goutte retombe donc dans la phase opposée (B) sur la surface du bain, en opposition de phase avec son mouvement précédent, et l'ensemble des ondes qu'elle avait générées.

8.1 Une involution de la dynamique d'un marcheur : le saut de phase de π

8.1.1 Principe

Le mouvement d'une goutte rebondissante étant sous-harmonique, il existe deux phases possibles du mouvement, comme illustré sur la figure 8.1. La goutte rebondit ainsi à la fréquence de Faraday f_F , égale à la moitié de la fréquence f_0 d'oscillation du bain. Les deux phases possibles du mouvement correspondent à des rebonds lors des phases paires de l'oscillation du bain (A) ou impaires (B). Dans des conditions normales, les rebonds de la goutte sont synchronisés et la goutte impacte toujours le bain dans la même phase du rebond.

A chaque rebond, la goutte émet une onde de même phase qu'elle, *e.g.* en phase A, qui oscille également à la fréquence moitié du forçage. L'ensemble goutte et ondes est donc synchronisé sur une seule phase d'oscillation du bain.

On se propose ici de *provoquer* un changement de phase en forçant par exemple un saut de la phase A vers la phase B. Pour cela, l'amplitude d'excitation du bain liquide est augmentée durant une période de Faraday, comme illustré en figure 8.1b. La goutte qui rebondissait initialement dans une phase A se retrouve après ce saut de phase provoqué à rebondir sur le bain durant l'autre phase d'oscillation du bain (B). Une augmentation de l'amplitude d'oscillation provoquera un vol parabolique d'une durée supérieure à une période, ce qui garantit que la goutte ne subira l'accélération supplémentaire qu'au cours d'un unique rebond.

On peut déjà signaler que ce changement de phase de π est une involution de la dynamique puisque, répété deux fois, le saut de phase ramène la goutte dans la phase initiale de son mouvement vertical. Par ailleurs, les ondes stationnaires de Faraday étant générées par les rebonds de la goutte, leur phase d'émission sera modifiée par le saut de phase. Préalablement générées en phase A, les nouvelles ondes seront générées en phase B. En revanche, des ondes précédemment émises en phase A resteront synchronisées sur cette phase après saut de phase.

8.1.2 Réalisation expérimentale d'un saut de phase provoqué

Pour réaliser un saut de phase de π , nous avons tiré profit de la souplesse du dispositif présenté au chapitre 2. Comme l'accélération du pot vibrant est contrôlée par ordinateur, il suffit d'implémenter le signal de la figure 8.1b qui correspond à une augmentation de l'amplitude d'accélération $\gamma_1 = \gamma_0 + \Delta\gamma_0$ durant deux périodes d'oscillation du bain, soit une période T_F de Faraday. Le signal reste sinusoïdal durant toute la durée de la perturbation.

L'augmentation d'amplitude a tout d'abord été contrôlée par déclenchement manuel afin de tester le procédé. Pour l'étude statistique de l'influence de ces sauts de phase sur la dynamique horizontale, une automatisation supplémentaire a été implémentée. Elle permet d'appliquer l'accélération verticale additionnelle $\Delta\gamma_0$ à intervalle de temps régulier. La durée T_r de l'intervalle a été choisie à 10 secondes pour les études statistiques d'événements décorrélés. Pour l'étude des corrélations entre saut de phase successifs sur l'évolution de la dynamique, la durée de l'intervalle a été réduite jusqu'à une seconde entre deux sauts de phase.

Le temps de réponse du pot vibrant étant de l'ordre de la période verticale d'oscillation, le signal obtenu a été mesuré à l'aide d'un accéléromètre pour vérifier la forme du signal récupéré. Les deux oscillations (phases A et B) sont d'amplitudes égales, et leur valeur absolue est en accord avec la valeur attendue.

La valeur précise de $\Delta\gamma_0$ nécessaire pour provoquer un saut de phase de π a été ajustée par tâtonnement, afin de provoquer des sauts de phase de π reproductible. Il n'existe en effet qu'une plage étroite de valeur de $\Delta\gamma_0$ pour laquelle un saut de phase

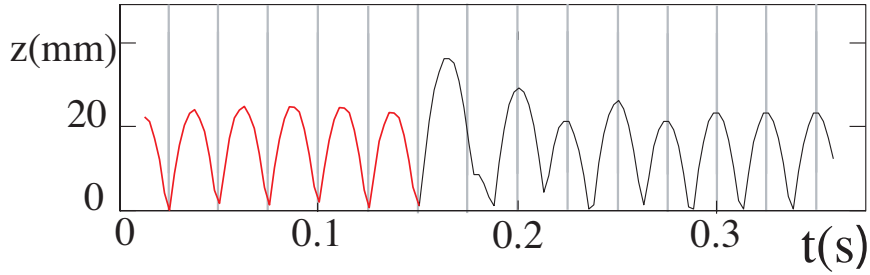


FIGURE 8.2 – **Mouvement vertical de la goutte avant et après saut de phase.** Détail du mouvement vertical $z(t)$ obtenu à la caméra rapide à 400 images/s. Les traits verticaux correspondent à la phase A de rebond. Au moment de l'application d'une accélération d'amplitude supérieure, la goutte effectue un vol parabolique de plus grande durée, suivi d'un rebond de très faible amplitude. La goutte retrouve alors rapidement un mouvement régulier, mais les nouveaux impacts de la goutte sur le bain sont déphasés de π par rapport aux rebonds précédents le saut de phase.

de π est provoqué. Cette valeur ne correspond d'ailleurs pas nécessairement à celle attendue par le calcul du temps de vol parabolique, en raison de la déformabilité de la goutte à l'impact, qui peut provoquer une dynamique plus complexe qu'une bille rebondissant sur un plateau [47].

Cette recherche de l'accélération optimale permettant de provoquer un saut de phase de π a été assistée par une observation directe du mouvement vertical de la goutte. Un saut de phase réussi correspond à une bonne resynchronisation du mouvement vertical après seulement quelques périodes d'oscillation du bain. La valeur de $\Delta\gamma_0$ est de l'ordre de $0.5\gamma_0$.

8.1.3 Saut de phase de π : effet sur le mouvement horizontal d'un marcheur

Pour observer le mouvement vertical et horizontal de la goutte au cours du temps, celle-ci a été filmée à l'aide d'une caméra rapide faisant un angle de 30° par rapport à la verticale, à 400 images par secondes. Le dispositif d'observation et d'éclairage est similaire à celui utilisé pour l'observation du mouvement horizontal simple étudié au cours des chapitres précédents.

Avec une caméra rapide enregistrant 10 images par période du mouvement vertical, cet angle de vue permet de suivre à la fois le mouvement vertical et le mouvement horizontal de la goutte. La position de cette dernière est détectée à l'aide d'un algorithme de détection de particule, analogue à celui présenté au chapitre 2.

Le mouvement vertical typique $z(t)$ de la goutte lors d'un saut de phase provoqué est présenté en figure 8.2a en fonction du temps. Avant le saut de phase (trait rouge),

le mouvement vertical est régulier de période $T = 1/40$ s égale à la période T_F de Faraday. L'augmentation de l'accélération du pot vibrant provoque un saut de phase de plus grande amplitude, suivi d'un second bien plus court. Après quelques oscillations verticales supplémentaires, le rebond vertical redevient régulier, mais en opposition de phase. Les instants des phases A représentés en traits gris verticaux sont déphasés de π par rapport à la nouvelle phase de rebond.

Le signal obtenu ne dépend pas de la phase initiale de la goutte choisie, et permet aussi bien de faire passer une goutte d'une phase A vers une phase B qu'une goutte d'une phase B vers une phase A.

Les ondes excitées paramétriquement et antérieures au saut de phase ne sont pratiquement pas affectées par la légère perturbation du forçage. Les impacts de la goutte sur la surface sont donc déphasés de π par rapport à ces ondes précédemment générées. Le champ d'onde h , lors d'un saut de phase à l'instant t_π subit donc, du point de vue de la goutte, la transformation suivante :

$$h(t_\pi^+) = -h(t_\pi^-) \quad (8.1)$$

Après saut de phase, la goutte générera de nouveau des ondes en phase avec elle, le champ d'onde total vaudra donc :

$$h(\vec{\rho}, t) = - \sum_{-\infty < t_n < t_\pi} h_0 J_0(||\vec{\rho} - \vec{r}(t_n)||) e^{-(t-t_n)/\text{Me}T_F} \quad (8.2)$$

$$+ \sum_{t_\pi < t_n < t} h_0 J_0(||\vec{\rho} - \vec{r}(t_n)||) e^{-(t-t_n)/\text{Me}T_F} \quad (8.3)$$

Les ondes nouvellement émises sont ainsi en opposition de phase avec celles précédemment émises.

8.2 Saut de phase de π et dynamique horizontale

Le principe d'application de ces sauts de phase ayant été validé par l'observation directe de la dynamique verticale, on se propose dans cette section d'étudier leur influence sur la dynamique horizontale dans le cas d'orbites simples périodique, puis de trajectoires chaotiques.

8.2.1 Du saut de phase au retournement temporel de la trajectoire

Pour un marcheur libre se propageant en ligne droite, un saut de phase provoqué induit après quelques périodes du rebond vertical un retour de la goutte le long de son chemin précédemment suivi. Il en va de même pour une trajectoire courbe comme

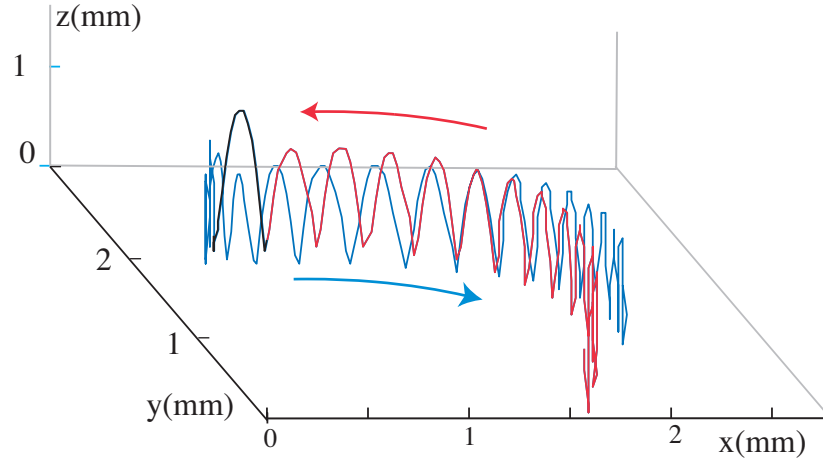


FIGURE 8.3 – **Trajectoire suivie par la goutte avant et après saut de phase.** Position $\vec{r} = (x, y, z)$ de la goutte au cours du temps, filmée à la caméra rapide (400Hz). Trajectoire de la goutte avant saut de phase (rouge), pendant le saut de phase (noir), et après saut de phase (bleu). On observe un retour du marcheur sur ses pas, après seulement deux oscillations verticales sur place.

l'illustre la figure 8.3. En vue de côté, les mouvements horizontaux et verticaux de la goutte peuvent être représentés simultanément.

Le saut de phase de π appliqué au mouvement vertical engendre un changement de sens de la force F_{ondes} générée par les ondes sur la goutte. Le résultat est un retour sur ses pas de cette dernière, après seulement quelques oscillations verticales du bain. La goutte retrouve ensuite sa vitesse avant saut de phase en quelques rebonds verticaux ce qui correspond à un temps de l'ordre de $T_V = 0.14$ s où T_V est le temps de retour à la vitesse d'équilibre défini et mesuré au chapitre 3.

Ce premier retournement met déjà en évidence qu'il est possible d'inverser le sens de parcours d'une trajectoire, par application d'un saut de phase de π dans le mouvement vertical de la goutte.

Jusqu'ici, le mouvement de la goutte était toujours synchronisé sur celui des ondes. Il n'y avait donc jamais eu besoin de considérer l'onde comme un objet oscillant à la période de Faraday. Cette expérience révèle l'influence possible d'une onde générée à une autre phase que celle du rebond de la goutte.

8.2.2 Retournement temporel

Par application d'un saut de phase de π , le mouvement d'un marcheur le long d'orbites périodiques telles qu'une lemnsicate ou une trajectoire circulaire peut également être inversé. Les figures 8.4a et b présente deux illustrations de ce type de retournement, pour une mémoire $Me = 50$ dans des régimes d'orbites stables.

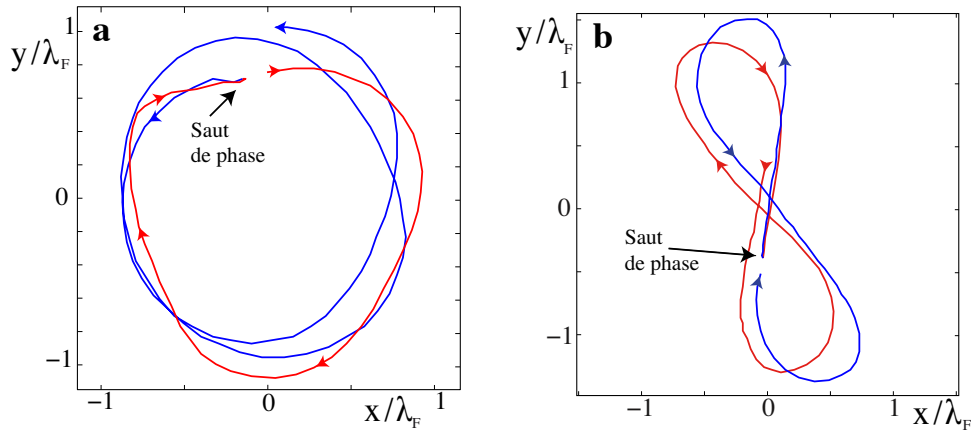


FIGURE 8.4 – **Saut de phase pour une trajectoire régulière.** a) Application d'un saut de phase lors d'un mouvement circulaire uniforme du niveau $n = 2$, pour $Me=50$. Trajectoire avant saut de phase (rouge), et après saut de phase (bleu). b) Application d'un saut de phase lors d'un mouvement en lemniscate, pour $Me=100$. Trajectoire avant saut de phase (rouge), et après saut de phase (bleu). On observe un point de rebroussement puis une trajectoire de même type mais parcourue en sens inverse.

La trajectoire avant retournement a été représentée en rouge, et celle après saut de phase en bleu. Dans les deux cas, le saut de phase provoque un changement immédiat de sens de parcours de la trajectoire antérieure.

Induire un saut de phase permet donc, dans une situation d'orbite périodique, de changer brusquement le sens de la vitesse, et donc le signe du moment cinétique. La conséquence est un parcours de la trajectoire passée en sens inverse, *i.e.* un retournement temporel pour le marcheur.

Notons que ce retournement du vecteur vitesse n'est pourtant pas garanti pour un marcheur. Par exemple dans le régime de basse mémoire ($Me \approx 10$) où la goutte suit une trajectoire circulaire, le mouvement n'est pas retourné : après saut de phase, la goutte se dirige en direction du centre. Cet effet provient d'une diminution de la force de propulsion après le saut de phase, en raison de la décroissance rapide des ondes générées avant le saut de phase.

Il est donc possible d'obtenir une forme de retournement temporel pour les trajectoires suivies par application d'un saut de phase de π dès que la mémoire est supérieure à T_V , *i.e.* que le champ d'onde est peu affecté par les quelques rebonds sur place effectués par la goutte. Observé dans le cas de trajectoires stables, ce retournement peut il être étendu à des trajectoires plus complexes, instables, telles qu'elles sont observées dans les régimes chaotiques du chapitre 5 ?

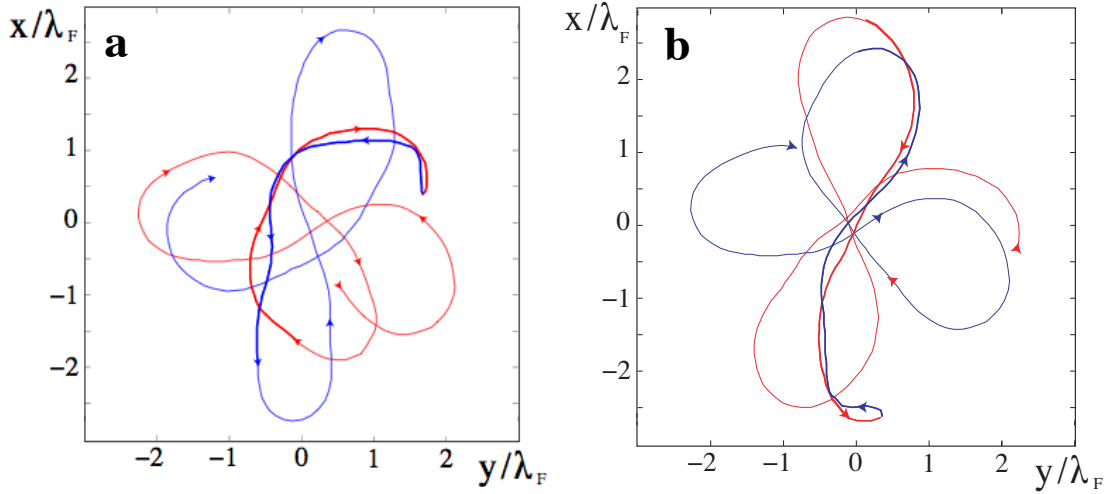


FIGURE 8.5 – **Saut de phase pour une trajectoire chaotique.** a) et b) Influence d'un saut de phase forcé dans une dynamique intermittente obtenue pour $Me \approx 150$ et $\Lambda = 1.6$. Trajectoire avant saut de phase (rouge), et après saut de phase (bleu). On observe un point de rebroussement, puis une trajectoire suivant le chemin aller durant un temps $\Delta t \approx 50T_F$. Une fois ce temps écoulé, la distance entre trajectoire aller et trajectoire retour diverge rapidement.

8.2.3 Retournement temporel d'une trajectoire chaotique

L'invariance temporelle du mouvement dans le cas de trajectoires périodiques n'est finalement que peu surprenante : il suffit en effet de changer le sens de la vitesse de la goutte ($\vec{V}(t_\pi^+) = -\vec{V}(t_\pi^-)$) pour que la goutte revienne sur ses pas.

Pour tester la robustesse de cette invariance, on se propose d'appliquer cette technique à des trajectoires plus complexes. Celles ci peuvent être obtenues dans les zones d'intermittence, qui ont été étudiées au chapitre 5. Afin d'obtenir une dynamique la plus erratique possible, on se place dans la limite de haute mémoire $Me > 100$, et pour des trajectoires de grande extension spatiale ($\Lambda \approx 1.6$).

Pour une telle dynamique chaotique, l'évolution temporelle du chemin suivie est extrêmement sensible aux conditions initiales : partant de deux trajectoires infiniment proches, la distance qui les sépare diverge exponentiellement. Pour ce régime, le temps typique de divergence est de l'ordre de 20 rebonds. Que se passe-t-il après un saut de phase provoqué ?

La figure 8.5 présente deux exemples de trajectoires chaotiques, avant et après un saut de phase provoqué. Les trajectoires antérieures sont représentées en rouge, et les trajectoires après saut de phase en bleu. On peut voir que même dans le cas d'une trajectoire désordonnée, le saut de phase provoque un rebroussement du mouvement de la goutte. Le chemin retour suivi est identique à celui suivi à l'aller, sur une longueur typique l'ordre de la longueur d'onde de Faraday λ_F , qui correspond

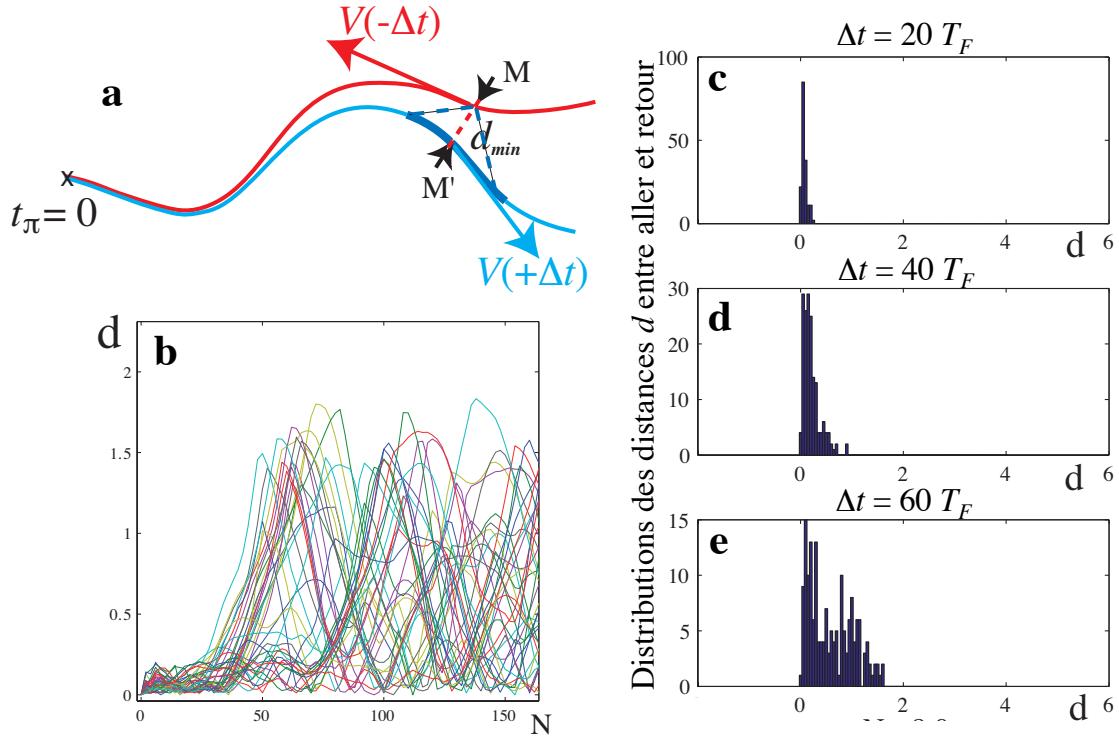


FIGURE 8.6 – **Statistique de la durée des retournements.** a) Principe de mesure de la distance entre chemin suivi à l’aller et au retour, pour un saut de phase de π forcé à $t_\pi = 0$. Pour un temps Δt après retournement, la distance $d||\vec{r}(\Delta t) - \vec{r}(-\Delta t)||$ mesure l’écart entre trajectoire aller et retour. La durée Δt est ensuite donné en nombre de rebond $N = \Delta t/T_F$. b) Distance d entre trajectoire aller et retour en fonction du nombre de rebonds écoulé depuis le saut de phase. On observe une divergence de certaines trajectoires au delà de $N \approx 50$. Pour $N < 40$, toutes les trajectoires aller et voisine sont telles que $d < 0.2\lambda_F$. c) d) et e) Histogramme des distances d entre trajectoire aller et retour respectivement pour $N = 20$, $N = 40$ et $N = 60$. On observe un lent étalement de l’histogramme au cours du temps. Pour $N = 60$, environ 30% des trajectoires sont telles que $d < 0.2\lambda_F$.

à une durée de plusieurs secondes. Après ce laps de temps, trajectoire aller et retour divergent de nouveau.

Le saut de phase de π n’est donc pas un simple changement de signe de la vitesse instantanée de la goutte, mais bien un retournement temporel de la trajectoire, sur un intervalle de temps non nul.

Ces comportements peuvent être analysés statistiquement. Pour cela, des sauts de phase répétés ont été appliqués à la goutte, avec un intervalle de temps de 10 secondes entre deux retournements. Cette durée est 4 fois supérieure au temps de mémoire MeT_F , pour laisser le temps à la trajectoire suivie par la goutte d’évoluer entre deux retournements successifs.

La mesure d'une corrélation entre chemin aller et chemin retour est effectuée via la distance d entre les positions de la goutte à deux temps symétriques par rapport à l'instant t_π du saut de phase provoqué comme illustré sur la figure 8.6a. En prenant l'origine des temps en t_π , la distance d est ainsi donnée par :

$$d(\Delta t) = ||\vec{r}(-\Delta t) - \vec{r}(\Delta t)|| \quad (8.4)$$

Pour éviter les décalages induit par une différence de vitesse entre trajectoire aller et retour, la distance d a été choisie comme le minimum entre $\vec{r}(\Delta t)$ et la trajectoire suivie avant retournement (voir figure 8.6a pour la définition géométrique de d_{min}).

Une mesure similaire peut être obtenue à partir de la direction des vitesses $U = \vec{V}(t_\pi - \Delta t) \cdot \vec{V}(t_\pi + \Delta t)$. Les résultats obtenus à partir de d et de U sont analogues.

La figure 8.6b présente cette distance d mesurée pour 150 trajectoires différentes au voisinage d'un saut de phase provoqué, en fonction du nombre de rebond N écoulé depuis le retournement. Rappelons que la durée entre deux rebonds est de $T_F = 1/40$ s, on a donc $N = \Delta T/T_F$. On observe que la distance entre la trajectoire suivie à l'aller et celle suivie au retour reste quasi-nul sur 40 rebonds, avant que certaines trajectoires ne divergent à nouveau.

Cette divergence des trajectoires au cours du temps Δt écoulé depuis le retournement peut être analysée à partir d'histogramme de la distance d , comme présenté en figures 8.6c, d et e pour des durées croissantes $\Delta t = 20, 40$ et $60 T_F$ du temps écoulé depuis l'instant t_π du retournement. Pour $\Delta t = 20 T_F$, aucune trajectoire n'a encore divergée. Pour $\Delta t = 40 T_F$, une petite fraction d'entre elles commence à s'éloigner. Pour $\Delta t = 60 T_F$, il reste 30% de trajectoires dont la distance d est inférieure à $0.5 \lambda_F$, les 70 % restant ayant divergé ($d > 0.5 \lambda_F$).

Cette représentation illustre la robustesse du processus de retournement, quel que soit la trajectoire suivie, sur une durée de l'ordre de 40 périodes du rebond vertical. Au delà, les trajectoires aller et retour divergent de nouveau. Notons que cette durée du retournement est comparable à la moitié du temps de mémoire $\tau/2 \approx 50 T_F$.

Les corrélations $U(\Delta t)$ sur l'orientation du vecteur vitesse avant et après une durée Δt depuis le retournement montrent que la distribution de U devient isotrope pour $\Delta t \approx 100 T_F$. Le saut de phase induit donc une perturbation de la dynamique sur un temps de l'ordre du temps de mémoire. Sur cet intervalle de temps, l'évolution de la dynamique chaotique est inhibée.

Même pour une trajectoire complexe, un marcheur soumis à un saut de phase de π revisite ainsi le chemin précédemment suivi.

L'observation de points de rebroussement peut s'expliquer par un changement de signe de la pente générée par les ondes au moment du retournement. En revanche, les corrélations temporelles induites par ces sauts de phase ne peuvent s'expliquer par un simple renversement de la pente locale. Par quel mécanisme le marcheur

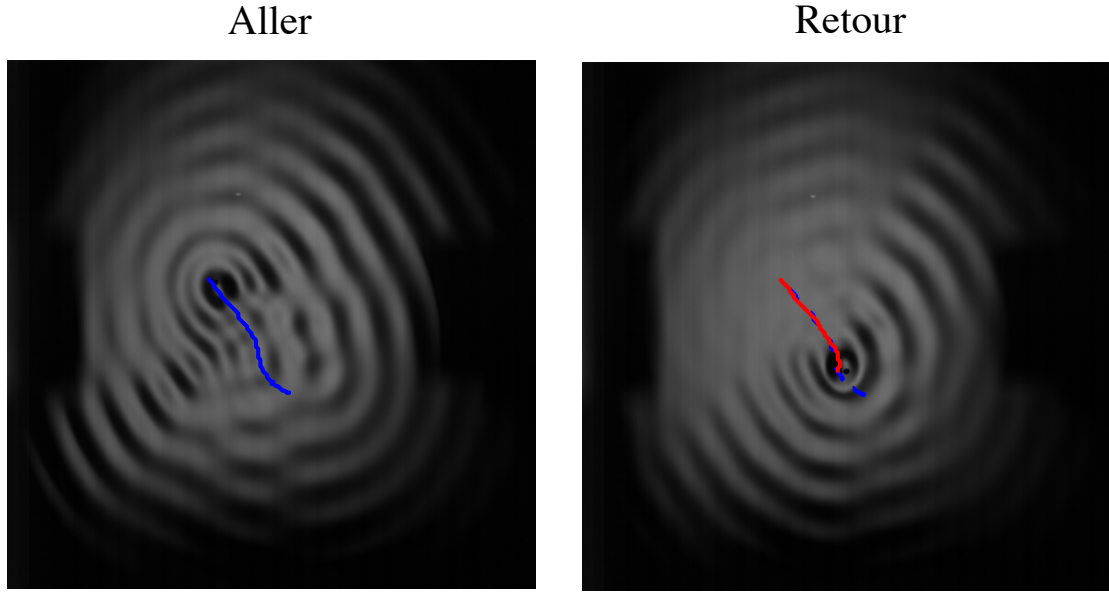


FIGURE 8.7 – **Observation directe de l'évolution du champ d'onde avant et après retournement.** a) Champ d'onde obtenu juste avant retournement. La trajectoire passé a été superposée en bleu, sur une longueur de persistance $S_M = V_0 \text{Me} T_F / 2 \approx 2\lambda_F$. Notons le champ d'onde de forte amplitude qui a été généré derrière le marcheur. b) Champ d'onde résultant après une durée $\Delta t = 1$ s suivant le saut de phase. La goutte a suivi le chemin aller. Le résultat est une bien moindre intensité du champ laissé derrière la goutte. Le champ résultant du parcours d'un chemin dans une phase A à l'aller puis une phase B au retour est d'amplitude plus faible.

peut-il revisiter, sur un laps de temps de l'ordre de la mémoire, la trajectoire qu'il a suivie à l'aller ?

8.3 Un processus de relecture et d'effacement dynamique du champ d'onde antérieur

L'observation directe du champ d'onde généré par le marcheur permet de mettre en évidence l'origine du phénomène de retournement temporel, ainsi que la cause de cette limitation dans le temps. Pour cela, nous étudierons un cas typique de retournement temporel induit par un saut de phase provoqué lors d'une trajectoire chaotique.

8.3.1 Observation directe du champ d'onde

Le champ d'onde est enregistré avec une caméra rapide à 800 images par seconde, synchronisée sur l'oscillation verticale du bain. La technique d'éclairage et de visualisation du champ d'onde est analogue à celle présentée au chapitre 2. A partir de ces images, deux films stroboscopés à la fréquence moitié de l'oscillation du bain peuvent être extraits. Ils correspondent respectivement à la phase A et à la phase B du mouvement vertical. La position de la goutte par rapport à la surface met bien évidence le changement de phase de π après application de la perturbation.

La figure 8.7 présente deux photographies du champ d'onde, prises en phase B juste avant le retournement pour le premier (figure 8.7a), et en phase A 1.5 secondes après le retournement (figure 8.7b). Dans les deux cas, la goutte se retrouve donc clairement visible, en l'air au dessus du bain. La trajectoire suivie avant le saut de phase est représentée en bleu, tandis que la trajectoire suivie après saut de phase est représentée en rouge.

Bien que les trajectoires suivies dans un passé proche soit le symétrique l'une de l'autre, les champs d'onde associés sont bien différents. A la fin du chemin aller, le champ d'onde généré est de forte amplitude et présente une structure complexe, en particulier le long du chemin que le marcheur a précédemment suivi. Après avoir parcouru le chemin retour, le marcheur n'a laissé derrière lui qu'un champ d'onde de faible amplitude.

En utilisant la méthode présentée au chapitre 2 pour la mesure de l'amplitude relative d'un champ d'onde, les amplitudes du champ laissé par le marcheur lors du chemin aller et du chemin retour peuvent être comparées. Cette mesure de l'amplitude moyenne A des ondes est effectuée sur un disque de diamètre $2\lambda_F$, dont le centre est situé à $2\lambda_F$ derrière la goutte. La mesure du rapport $A_{\text{aller}}/A_{\text{retour}}$ met en évidence que l'amplitude du champ laissé a été divisée par trois entre l'aller et le retour.

Ces photographies et la mesure de l'amplitude des ondes correspondantes révèlent ainsi un processus d'effacement du champ d'onde précédemment généré, lorsque la goutte repasse par son propre chemin en opposition de phase.

8.3.2 Origine du retournement et effacement temporel

Pour comprendre l'origine de cet effacement, il faut revenir au principe de superposition des ondes que la goutte génère à chaque impact sur le bain. Ce principe de superposition appliqué à un marcheur de même phase A implique que deux ondes d'amplitude A_0 émises au même endroit interfèrent constructivement : le champ résultant est d'amplitude double.

En cas de saut de phase, les ondes nouvellement émises sont en opposition de

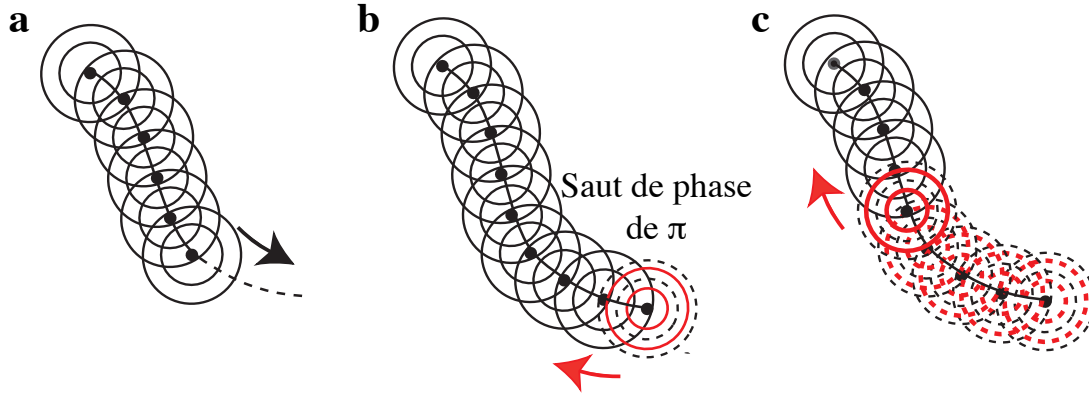


FIGURE 8.8 – **Principe d'effacement du chemin par saut de phase de π .** a) Schéma d'une trajectoire suivie par une goutte de phase A, qui laisse derrière elle un chemin de sources d'onde de même phase (A). Ceux-ci sont représentés par cercles concentriques noirs. b) Au moment du saut de phase, la goutte passe d'une phase A à une phase B. L'ensemble des ondes précédemment émises seront maintenant déphasées de π aux instants des nouveaux chocs. La pente générée par ces ondes sur la goutte est maintenant de signe opposé : celle-ci va revisiter le chemin émis à l'aller. c) Au fur et à mesure des rebonds, la goutte génère des ondes de phase B, à l'endroit où elle avait générée des ondes de phase A. Le résultat est une interférence destructive entre ces sources d'onde. Pour une durée $\Delta t \ll \text{Me}T_F$, seul le champ d'onde généré par les sources visitées une fois et une seule contribue au champ total. Déphasé de π par rapport à la goutte, ce champ d'onde génère une force qui la guide le long du chemin aller.

phase par rapport à celles émises avant le saut de phase. Un chemin qui a été visité par un marcheur de phase A à l'aller et de phase B au retour (ou inversement), induira une interférence destructive du champ généré au retour avec celui créé à l'aller. Pour le calcul du champ total généré, seules les portions de trajectoires qui n'ont été visitées qu'une seule fois contribueront significativement au champ total.

Ce processus d'interférence destructive induit par un saut de phase provoqué est illustré en figure 8.8. Il permet également de comprendre en quoi le retournement temporel de la trajectoire suivie n'est pas uniquement un renversement instantané du vecteur vitesse. Le long d'un chemin quelconque, le marcheur laisse derrière lui un chemin de sources (figure 8.8a). Après saut de phase provoqué, ce champ h subit une transformation $h \rightarrow -h$ qui induit un changement de sens de la force exercée à l'instant t_π du retournement (figure 8.8b). Au fur et à mesure du parcours retour de cette trajectoire, le chemin suivi depuis le retournement a été parcouru une fois dans chacun des phases. Le champ généré par ce double parcours de la portion de chemin est donc nul tant que le temps écoulé est petit devant le temps d'amortissement

$\text{Me}T_F$ des ondes.

Le champ résultant est donc généré uniquement par la portion de chemin qui n'a été visité qu'une seule fois et qui se situe toujours devant le marcheur. La force $F_{\text{ondes}}^{\rightarrow}$ générée par la goutte en Δt s'exprime donc en fonction de la force générée en $-\Delta t$ par :

$$F_{\text{ondes}}^{\rightarrow}(\Delta t) = -e^{\frac{-2\Delta t}{\text{Me}T_F}} F_{\text{ondes}}^{\rightarrow}(-\Delta t) + e^{\frac{-\Delta t}{\text{Me}T_F}} \sum_{0 < t_n < \Delta t} h_0 J_0(|\vec{\rho} - \vec{r}(t_n)|) 2 \sinh \frac{t_n}{\text{Me}T_F} \quad (8.5)$$

Tant que $2\Delta t \ll \text{Me}$, on a $\sinh t_n/(\text{Me}T_F) \ll 1$ et $e^{-2\Delta t/(\text{Me}T_F)} \approx 1$ la force exercée par les ondes sur la goutte peut être considérée comme de sens opposé :

$$F_{\text{ondes}}^{\rightarrow}(\Delta t) \approx -F_{\text{ondes}}^{\rightarrow}(-\Delta t) \quad (8.6)$$

Cet effet d'interférences destructives entre les sources d'ondes laissées à l'aller et le retour garantit une force exercée par les ondes sur la goutte de sens opposé, tant que l'intervalle de temps écoulé est inférieur au temps de mémoire. Cet effet explique également la diminution d'amplitude du champ total, puisque seule le chemin parcouru une seule fois contribue significativement au champ total.

La stabilité de cette trajectoire vis à vis d'une perturbation transverse est également assurée. En effet, un marcheur laissant derrière lui un chemin de sources d'ondes J_0 , il avance sur le front d'une crête du champ d'onde. Après saut de phase, cette crête se transforme en creux, rendant la trajectoire aller stable vis à vis d'une perturbation transverse. Des oscillations de la trajectoire retour autour de la trajectoire aller peuvent d'ailleurs être observées, comme c'est le cas pour les extraits de trajectoires chaotiques de la figure 8.5a) et b).

Lorsque la goutte a parcourue une longueur de l'ordre de $S_{\text{Me}}/2$, l'"ancien" champ d'onde a disparu. Le nouveau champ émis par la goutte n'est plus soumis au processus d'effacement, et celle-ci recommence la construction d'un nouveau champ d'onde global. La goutte retrouve alors sa liberté originelle, et la trajectoire suivie n'est plus corrélée avec celle précédemment suivie.

8.3.3 Perspectives

Cette étude de l'influence d'un saut de phase provoqué sur la dynamique d'un marcheur a mis en évidence qu'il était possible d'inverser le sens de parcours de la trajectoire suivie. A ce stade, plusieurs questions restent néanmoins en suspens :

- Le long de cette trajectoire, des fluctuations de vitesse peuvent apparaître. Seront-elles également retournées ? La présence d'un terme d'inertie et d'un terme de friction dans l'équation d'évolution d'un marcheur laisse penser qu'il y aura déphasage entre fluctuations de vitesse aller et retour.

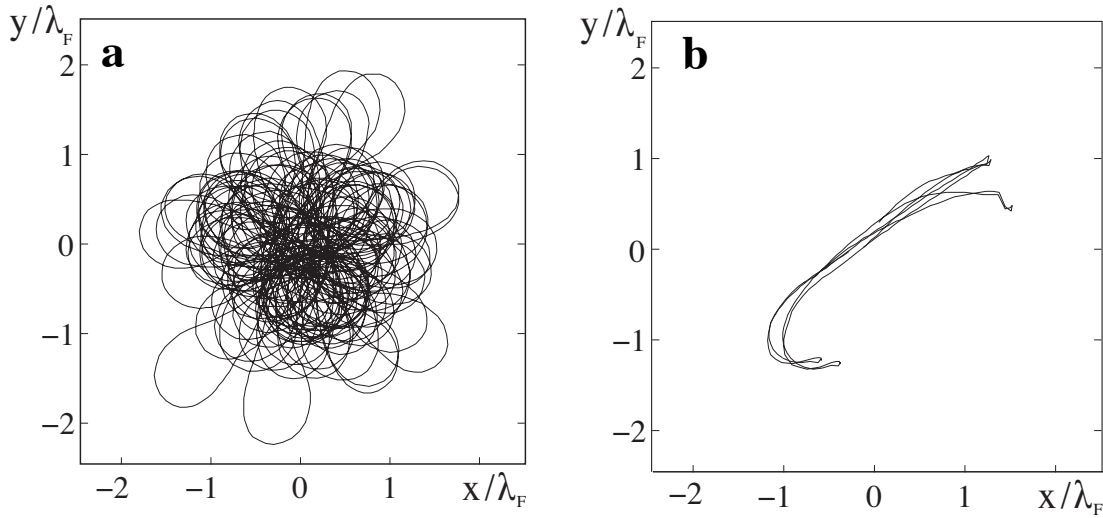


FIGURE 8.9 – **Inhibition du chaos par sauts de phase répétés.** a) Trajectoire chaotique obtenue pour $Me = 70$. b) Application de multiples sauts de phase, espacés par une durée $T_r = 2.5$ s. La goutte se retrouve piégée le long d'une trajectoire dont la périodicité est donnée l'intervalle de temps T_r entre deux retournements.

- Le retournement temporel est valable sur un temps comparable au temps de mémoire, même pour une trajectoire complexe. Les temps mis en jeu sont alors de l'ordre de plusieurs secondes. Que se passe-t-il si l'on provoque des sauts de phase à intervalle plus court que ce temps typique de divergence ?

8.3.4 Inhibition d'un régime chaotique

Le retournement temporel local du sens de parcours peut être étendu au cas de multiples sauts de phase. On considère pour cela une suite de retournements, espacés d'une période T_r entre eux. La figure 8.9 présente un exemple de sauts de phase répétés, appliqués au cours d'un régime chaotique (figure 8.9b). On observe une série de trajectoire identiques, là où, initialement, le signal était chaotique.

Par cette technique, il est possible d'inhiber l'apparition du chaos en bloquant le marcheur le long de trajectoires particulières. En forçant la goutte à revisiter des zones où des ondes ont été émises en opposition de phase, le champ d'onde subit périodiquement une interference destructive.

8.4 Conclusion

Ainsi, il est possible de retourner le sens de propagation d'un marcheur, par application d'un saut de phase de π à la dynamique verticale d'une goutte. Le résultat est un retour sur ses pas de la goutte, sur une durée comparable au temps

d'amortissement des ondes.

Lors de ce processus de relecture de l'information inscrite dans le champ d'onde, la goutte efface sur son chemin le message précédemment inscrit. Ce phénomène peut s'expliquer par une interférence destructive entre sources aller et retour, qui sont déphasées de π entre elles.

Le test de l'invariance temporelle de la dynamique d'un marcheur est rendu possible par l'existence d'une mémoire ondulatoire qui stocke des informations sur la trajectoire précédemment suivie. Régie par une équation d'onde, ces mémoires ondulatoires sont ainsi "relues", en opposition de phase grâce à l'application d'un saut de phase de π au mouvement vertical de la goutte.

Conclusion

Grâce à l'utilisation d'un dispositif magnétique, un marcheur a pu être piégé par une force extérieure. Le confinement dans un puits de potentiel harmonique a alors servi de moyen d'exploration de la dynamique d'un marcheur.

Une première étude dans le régime dit de basse mémoire a mis en évidence le caractère dissipatif de la dynamique longitudinale. Les fluctuations de vitesse sont alors régies par un équilibre entre friction et force de propulsion, qui peuvent être décrites par un terme de friction de Rayleigh. La conséquence pour la dynamique du marcheur est l'existence d'un temps caractéristique de retour à la vitesse d'équilibre. La dynamique longitudinale est ainsi pilotée par ce temps de retour, en plus du couplage potentiel entre goutte et champ précédemment généré qui n'agit que comme une perturbation de cet équilibre. Dans ce régime, le marcheur peut finalement être considéré comme une particule auto-propulsée non brownienne.

La dynamique selon la direction transverse au mouvement s'affranchit de cet équilibre entre propulsion et dissipation. Selon cette direction, le mouvement du marcheur peut être décrit par une équation conservative, mettant en jeu les forces extérieures et la force exercée par les ondes sur la goutte. Une des conséquences est un changement des trajectoires de base : les ellipses, paraboles, et autres courbes standards de la mécanique du point ne sont plus solutions des équations du mouvement. Seul l'orbite circulaire reste solution, en l'absence de force transverse au mouvement exercée par les ondes sur la goutte.

L'étude de la dynamique à plus haute mémoire a mis en évidence l'apparition d'une famille de trajectoires stables qui peuvent être décrites par deux observables discrètes, l'extension spatiale moyenne \bar{R} et le moment cinétique moyen \bar{L} . Ces deux grandeurs permettent de définir deux nombres n et m qui suivent les règles de sélection suivantes :

- $\bar{R} = R_n$, avec n entier et $J_0(R_n) = 0$.
- $\bar{L} = L_m$, avec m entier, $J_0(L_m) = 0$ pour $m \neq 0$ et $L_0 = 0$.
- $m \in \{-n, -n+2, \dots, n\}$.

Ces règles de sélections définissent un jeu d'états propres de la dynamique, qui sont caractérisés à la fois par des trajectoires spécifiques et par des modes de champ asso-

ciés. L'excitation d'un champ d'onde par la goutte permet d'observer ces trajectoires non circulaires. Une famille de courbes géométriques émerge alors : les k -courbes de Cassini dont la courbure le long de la trajectoire s'exprime en fonction des forces appliquées. Des règles de sélection des symétries et des tailles de trajectoires opèrent alors : la lemniscate et le trifolium en sont des exemples remarquables.

Les trajectoires observées minimisent l'amplitude du mode de champ présentant la même symétrie que la trajectoire suivie. Démontré dans le cas du cercle et partiellement analysé pour la lemniscate, ce résultat suggère l'existence d'un processus d'auto-organisation entre trajectoires suivies et champ d'onde généré.

Le rôle joué par la mémoire dans la stabilisation des états propres est double. Suivant le confinement imposé, l'augmentation de la mémoire de chemin mène à des trajectoires quantifiées, stables, ou au contraire à une dynamique chaotique. Cependant, les Cassiniennes, modes propres de la dynamique, persistent dans cette dynamique désordonnée. Ces trajectoires particulières forment ainsi une base d'états propres qui composent les trajectoires plus complexes : une superposition d'état est observée sous la forme d'une dynamique intermittente entre états voisins. Compte tenu du faible nombre de dimensions mises en jeu, cette dynamique reste, au moins partiellement, déterministe.

L'analyse pas à pas de l'apparition de cette intermittence a mis en évidence deux scénarios de perte de déterminisme. Le premier résulte de l'influence grandissante du champ d'onde sur la dynamique de la goutte. Il apparaît une seconde fréquence non commensurable par rapport à la période des orbites circulaires du niveau $n = 1$, qui mène à des signaux chaotiques. Cette dynamique révèle une hypersensibilité aux conditions initiales : le déterminisme est perdu après un temps fini. Pour une extension spatiale supérieure des trajectoires, l'apparition des transitions n'est plus déterministe, mais les régimes transitoires entre niveaux restent déterministes. Dans ce second mécanisme de perte de déterminisme, la mémoire semble jouer un rôle d'amplificateur de bruits.

L'augmentation de la cohérence temporelle rend ainsi la dynamique d'un marcheur de plus en plus erratique. Cette perte de déterminisme par augmentation de la cohérence temporelle du système n'est peut être pas spécifique à une goutte rebondissante, et mériterait, je pense, d'être étudié dans d'autres systèmes.

Les états propres ainsi révélés présentent la caractéristique de ne pas dépendre de la forme du puits de potentiel qui a pourtant servi à les obtenir. Pour tester l'existence *intrinsèque* de solutions non rectiligne uniforme en l'absence de toute action extérieure, une expérience de libération d'un marcheur a été mise au point. Grâce à une coupure de la force exercée, des auto-orbites ont pu être observé durant quelques tours de piste. Dans ce régime, la sensibilité à un bruit extérieur a également été retrouvée : en simulation numérique, pour un bruit d'amplitude nulle, la durée

de l'auto-orbite n'est pas bornée.

A la lumière de ces différents résultats, il est intéressant de revenir sur l'ingrédient générateur de l'ensemble de ces phénomènes : la mémoire de chemin.

La spécificité du marcheur résulte ainsi de l'existence d'une cohérence temporelle, *i.e.* un couplage entre le mouvement présent et de la trajectoire précédemment suivie. Une première conséquence est que la dynamique d'un objet ponctuel en espace mais étendu en temps ne peut être réduite à celle d'un point matériel. Cet effet se manifeste par des forces qui dépendent des dérivées successives de la position, ou une dynamique pilotée par un nombre de degré de liberté plus élevé que celle d'un mobile ponctuel.

Il est ainsi possible d'observer, pour une goutte, des phénomènes typiques d'objets étendus en espace comme une sélection de modes propres d'origine ondulatoire pour les trajectoires suivies, ou l'observation d'un mode non propagatif (auto-orbite). En englobant le champ d'onde dans la description, le marcheur redevient pourtant un simple objet classique, étendu en espace, mais dont l'évolution est régie par des équations *locales* en temps, *i.e.* ne faisant intervenir que l'instant présent. Cette transcription en une dynamique locale d'un système à mémoire peut toujours être obtenu pour un système usuel, en englobant l'ensemble du support de stockage de l'information.

Que dire d'une dynamique qui ne *pourrait pas* être réduite à des équations locales en temps ? Nous parlons ici d'un objet qui est défini dans un espace spatio-temporel, et dont la dynamique ne peut être réduite à des équations locales en temps contenant toute l'information. Cet objet occuperait, par exemple, un volume $(\Delta L)^3$ de l'espace, et une durée ΔT sur l'axe des temps.

Se pose alors un certain nombre de problèmes logiques : pour un tel objet étendu en temps et en espace, que signifie "mesurer" ?

En cherchant à mesurer une propriété de cet objet comme son énergie totale à un instant t donné, seule une information très partielle pourra être acquise. En effet, notre objet ne pouvant être entièrement défini que sur un intervalle de temps ΔT , une mesure à un instant t donné ne le caractérisera pas entièrement.

Qu'advient-il si l'on répète plusieurs fois cette mesure à des instants successifs différents ? L'indépendance de ces mesures amène à une contradiction. Dans le cas de mesures qui ne perturbent en rien la cohérence temporelle de l'objet en question, l'ensemble de l'information le définissant pourrait finalement être acquise de manière séquentielle. Ainsi après N mesures indépendantes l'objet initial peut être défini à un instant t fixé, par l'ensemble des résultats des mesures acquises.

Deux mesures successives sur un objet étendu en temps et en espace ne seront donc pas indépendantes : toute mesure devrait affecter la cohérence temporelle du système en question. Ce problème de la mesure se posera en particulier dans le cas

d'états *temporellement étendus*, *i.e.* qui ne peuvent être définis à un instant t donné.

Comme seule une information très partielle peut être obtenue à chaque mesure, et que cette mesure modifiera l'état du système, il n'est d'ailleurs peut être pas nécessaire, en pratique, de chercher à décrire cette cohérence temporelle. En oubliant toute cohérence temporelle, un tel objet peut probablement être décrit par un comportement moyen statistique, résultat de n'importe qu'elle mesure extérieure ponctuelle en temps. Les états mesurables deviendraient uniquement ceux qui peuvent être décrits par une mesure ponctuelle en temps, *i.e.* correspondant à des *états ponctuels en temps*.

Cette description du comportement moyen de notre objet un peu singulier pourrait être résumé comme suit :

- Seul les états ponctuels en temps sont accessibles à une mesure à un instant t .
- Les grandeurs mesurables possibles sont identiques à celles d'un objet ponctuel en temps : position, vitesse, moment cinétique, énergie, etc.
- Les états ponctuels en temps forment une base des états possibles : tout état temporellement étendu pourra être décomposé sur cette base.
- Les coefficients de la décomposition d'un état temporellement étendu sur la base des états ponctuels déterminent la *probabilité* de mesure de chaque état ponctuel.
- Une mesure détruit la cohérence temporelle : mesurer un objet dans un état ponctuel donné est équivalent, du point de vue des mesures futures, à "cet objet a été jusqu'à l'instant t de la mesure dans l'état ponctuel mesuré à l'instant t ".
- Les probabilités de mesures de chaque état ponctuel en temps peuvent évoluer au cours du temps, en fonction de l'énergie de l'état considéré.

Cette description partielle d'un objet étendu en temps et en espace à la fois, soulèverait cependant des paradoxes, en particulier dans le cas de deux objets ayant subis une interaction passée et dont la cohérence temporelle n'est pas détruite. Cette cohérence temporelle du système introduira des corrélations entre les résultats d'une mesure future sur l'un et sur l'autre de ces objets, qu'une théorie de ce genre ne pourrait expliquer qu'au prix d'une gymnastique intellectuelle difficile.

Perspectives

Au cours de ce travail, de nombreuses idées de développement possibles sont apparues. Certaines d'entre elles ont été partiellement explorées sans que le travail ait été exhaustif, d'autres sont restées à l'état d'idées.

La première piste d'exploration concerne l'application d'une force oscillante dans le temps. Cela revient à étudier l'influence d'une onde extérieure sur le mouvement de la goutte, par ailleurs toujours régi par l'existence d'une mémoire ondulatoire. Peut-on forcer une transition entre niveaux ?

Une autre voie possible consiste à appliquer un potentiel magnétique autre que le simple puits harmonique. Un dispositif de confinement à l'aide de deux aimants placés à distance réglable a été mis au point. Le double puits de potentiel ainsi créé met en évidence des états nouveaux, en présence d'une asymétrie réglable entre les deux directions d'espace.

Nous reviendrons ensuite brièvement sur ce qui fait la spécificité d'un marcheur : sa mémoire ondulatoire. Un parallèle peut être effectué avec d'autres systèmes, comme des fourmis à la recherche de nourriture. Ce plongement dans les systèmes à mémoire permettra de mettre en exergue ce qui fait la spécificité d'un marcheur : sa mémoire ondulatoire.

Nous aborderons ensuite une question restée en suspens : peut-on passer d'une vision déterministe de la dynamique d'un marcheur à une description statistique ? Deux études allant dans ce sens sont actuellement en cours. Une en collaboration avec Maxime Hubert doctorant à l'université de Liège pour comprendre l'émergence d'un comportement probabiliste non déterministe. L'autre en collaboration avec Marc Miskin, post-doctorant à l'université de Cornell aux Etats-Unis, pour élaborer et valider expérimentalement un modèle statistique permettant de décrire les trajectoires suivies sous forme d'intégrale de chemin. La technique expérimentale de mesure de ces probabilités sera alors évoquée.

Pour finir, nous verrons en quoi ce passage de l'onde physique entourant le marcheur à une équation stochastique de la probabilité de présence du marcheur peuvent rappeler, dans un tout autre contexte, les travaux effectués par Louis De Broglie dans les années 30.

Transitions forcées entre niveaux

Le confinement dans un puits de potentiel harmonique a mis en évidence qu'il était difficile pour un mobile auto-propulsé comme le marcheur d'explorer différents niveaux d'énergie à constante de raideur fixée.

Pour contourner cette limitation, il est possible d'ajouter une composante variable de la force exercée afin de provoquer des transitions vers des états excités.

La force magnétique exercée est modulée grâce à une oscillation dans le temps du courant I_0 parcourant les bobines. Pour le montage expérimental utilisé, cette oscillation du courant induit une modulation linéaire de la constante de raideur $k(t)$ de la force exercée sous la forme :

$$k(t) = k_0 + k_1 \cos(2\pi f_1 t) \quad (8.7)$$

où k_0 est la constante de raideur initiale, k_1 une amplitude de variation de la raideur et f_1 la fréquence d'oscillation de la force additionnelle.

Cette force oscillante est analogue à l'action d'une onde extérieure qui agirait sur la goutte. Cette technique permet donc de soumettre le marcheur à l'influence d'une onde extérieure qui n'interfère pas avec les ondes émises par le marcheur lui-même. On parlera d'*onde synthétique*. Il s'agit donc d'un moyen d'effectuer une mesure non intrusive via une onde sur la trajectoire suivie. Quelle est la conséquence d'une telle perturbation sur la trajectoire d'un des états propres d'un marcheur ?

Un état propre circulaire $n = 2$ est alors préparé, dans un régime de haute mémoire ($Me \approx 50$). Cette préparation nécessite un réglage fin de la constante de raideur k_0 qui fixe la valeur du paramètre de confinement Λ . Une trajectoire circulaire non perturbée peut ainsi être obtenue.

Une force oscillante peut alors être appliquée à cette orbite circulaire. La figure 8.10a illustre le principe dans le cas d'une fréquence $f_1 = 2f_0$. Tant que k_1 est faible, la perturbation observée est un épicycle de faible amplitude, quelle que soit la fréquence f_1 de la perturbation. Pour une perturbation d'amplitude supérieure ($k_1 \approx 0.4k_0$), le résultat dépend fortement de la fréquence d'oscillation f_1 de l'onde synthétique appliquée. Il apparaît, pour une plage de fréquence très fine située au voisinage de $1.4f_0$, une transition vers un autre état propre, la lemniscate (4,0), comme le montre la figure 8.10. La mesure du moment cinétique L associé à cette trajectoire met en évidence une lente déstabilisation de l'orbite circulaire, qui conduit à l'apparition d'une lemniscate. Après une première transition avortée, le marcheur se retrouve finalement dans un état stable excité, *i.e.* un état de plus haute énergie potentielle magnétique moyenne. Après coupure de la perturbation, il peut également y avoir désexcitation, en un temps long devant la période de l'orbite. S'agit-il d'une émission spontanée ? Comment est modifié le champ d'onde à la

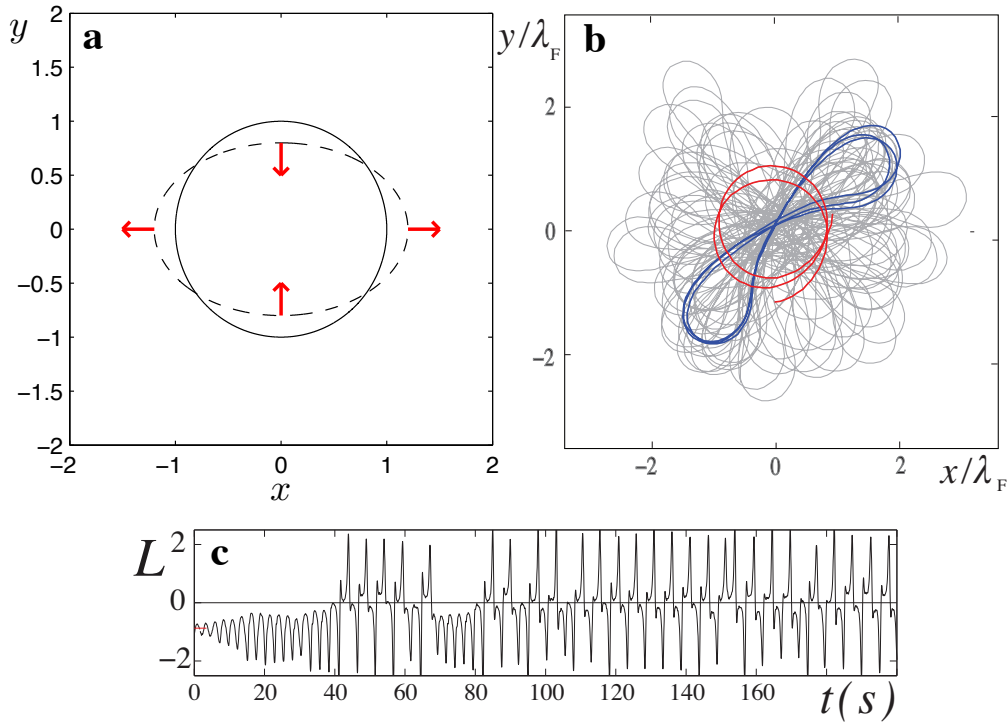


FIGURE 8.10 – **Transition forcée entre niveaux.** a) schéma de principe de l'application d'une force oscillante de fréquence $f_1 = 2f_0$ où f_0 est la fréquence de rotation de l'orbite initiale. En faisant varier le courant I_0 parcourant les bobines, le marcheur peut être soumis au passage d'une *onde synthétique*. b) A partir d'un état propre circulaire $n = 2$ obtenu pour une goutte de vitesse $V = 9.5$ mm/s et un confinement $\Lambda = 0.87$, une perturbation d'amplitude $k_1 = 0.4k_0$ et de fréquence $f_1 = 1.4f_0$ est appliquée. Cette onde synthétique provoque une transition vers un état propre de plus grande énergie potentielle magnétique, la lemniscate $(n, m) = (4, 0)$. Trajectoire avant transition (rouge), et après transition (bleu). c) Signal du moment cinétique L au cours du temps associé à la trajectoire. On observe une stabilisation du mouvement le long d'une lemniscate (oscillation périodique autour de $L = 0$).

transition d'un mode à l'autre ?

Des premiers balayages en fréquence de la perturbation f_1 ont été effectués. Les fréquences f_1 pour lesquelles des transitions vers un autre état sont observées ne correspondent pas à des multiples entiers de la fréquence de rotation f_0 , et dépendent aussi du niveau initial considéré ($f_1 \approx 1.4f_0$ pour $n = 2$, $f_1 \approx 0.8f_0$ pour $n = 1$). Notons également que ces transitions n'autorise pas le passage d'une orbite circulaire n vers une orbite circulaire de même sens de rotation mais de taille différente n' . Peut on explorer les différentes transitions possibles ? S'agit-il d'un phénomène d'absorption stimulée ? Toutes ces questions restent encore à explorer.

Marcheur dans un double puits de potentiel

Les expériences réalisées au cours de cette thèse ont été faites dans un puits de potentiel axisymétrique. On peut se demander quel type de comportement pourrait être observé pour d'autres types de confinement.

Pour explorer cette voie, un dispositif expérimental a été mis au point en utilisant deux aimants situés à une distance W réglable entre eux. Le confinement moyen imposé peut également être réglé par la distance d entre les aimants et la surface du bain. Le résultat est la création d'un double puits de potentiel pour la goutte qui peut présenter soit deux minima distincts soit une forme elliptique suivant la distance L choisie entre les aimants.

Les premières expériences réalisées mettent en évidence de nouveaux types de trajectoires stables. L'un d'entre eux est illustré sur la figure 8.11a, dans le cas d'un régime intermittent obtenu pour $Me = 25$, et une distance W entre les puits de $2\lambda_F$. Le signal de moment cinétique L associé est représenté en fonction du temps en figure 8.11b.

Notons l'apparition d'une trajectoire en ovale centré autour de la barrière d'énergie entre les deux puits. L'orbite n'est alors pas centré autour des minima locaux formés par les deux puits de potentiel. Cette nouvelle configuration de confinement permet donc de réaliser, pour un marcheur, une liaison entre deux potentiels attractifs. Peut-on reproduire une liaison chimique avec ce type de dispositif?

Dans cette nouvelle configuration, la dynamique exhibe des transitions d'un puits à l'autre, d'autant plus fréquentes que la barrière d'énergie potentielle qui les sépare est de faible amplitude.

Suite à ces premiers résultats, une étude numérique a été initié par Maxime Hubert, doctorant à l'université de Liège, pour comprendre la dynamique d'un marcheur dans ce double puits. Par exemple, le travail moyen de la force de confinement est-il toujours nul? Peut-on imaginer la création d'états liés où le mouvement d'un marcheur tend en moyenne à rapprocher les deux aimants entre eux?

D'autres configurations de champ magnétique pourraient aussi être explorées, par exemple en utilisant un réseau d'aimant qui générerait un puits de potentiel périodique pour la goutte. Ce potentiel est alors une implémentation d'un cristal bidimensionnel qui peut piéger le marcheur au voisinage de chacun des sites. Quelles seraient les propriétés de transport d'un marcheur au sein d'un cristal de ce type?

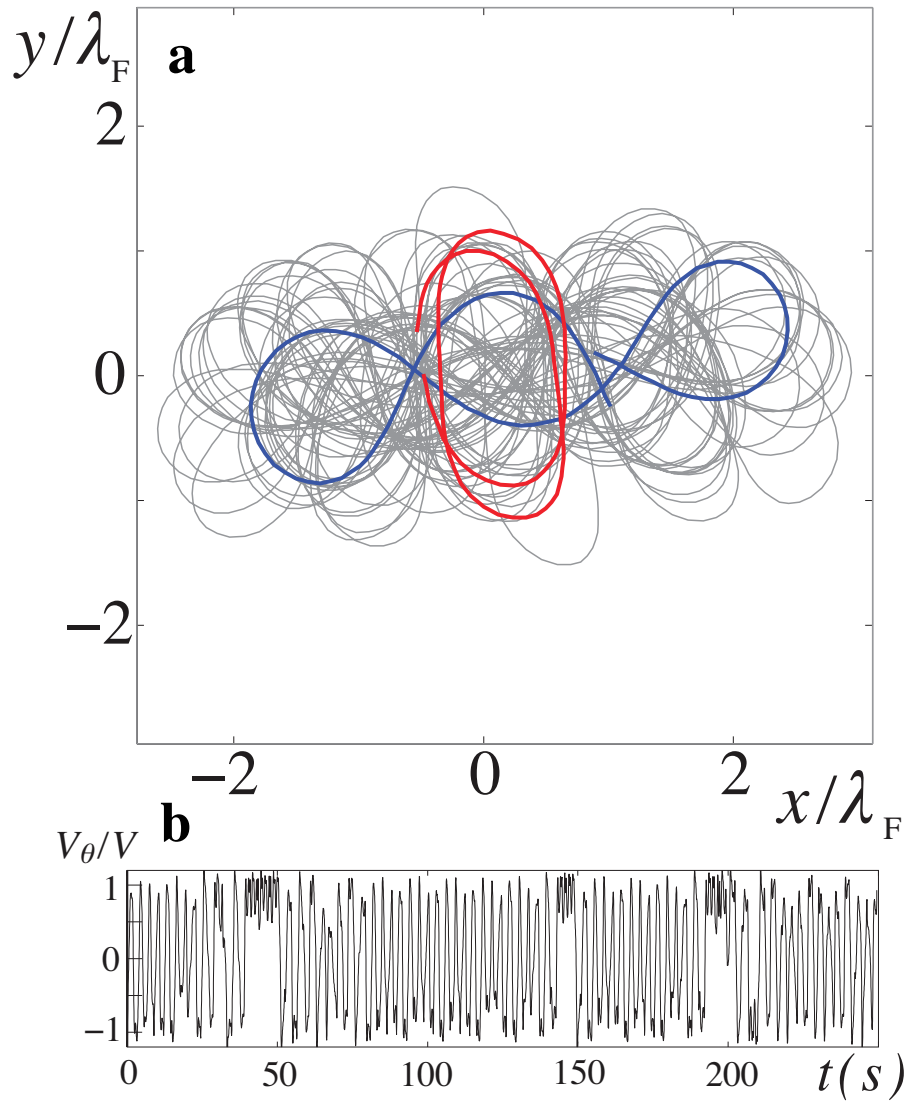


FIGURE 8.11 – **Trajectoire d'un marcheur dans un double puits de potentiel.** Un double potentiel magnétique a été généré à l'aide de deux aimants cylindrique identiques, placés à une distance L l'un de l'autre. a) Trajectoire obtenue pour $L = 2\lambda_F$ et $d = 60$ mm. Cette configuration correspond au cas où les aimants forment deux minima distincts d'énergie potentielle. Deux extraites de la trajectoire ont été surlignées en rouge (ovale), et bleu (mode à trois lobes). b) Signal V_θ/V au cours du temps, permettant d'observer le sens de rotation du marcheur autour du centre.

Systèmes à mémoire : un couplage entre champ et point matériel

Le marcheur est piloté par une *mémoire ondulatoire*. Il s'agit ainsi d'un couplage entre le mouvement d'un point matériel, la goutte, et d'un champ spatialement étendu, les ondes stationnaires de Faraday.

Cette interaction entre goutte et onde peut être définie formellement par la combinaison de trois processus : l'*écriture* d'une information, son *stockage* et sa *lecture*. Dans le cas d'un marcheur, ces trois procédés ont été identifiés :

- **Écriture** : à chaque impact $\vec{r}(t_n)$, la goutte génère une onde circulaire $J_0(||\vec{\rho} - \vec{r}(t_n)||)$ centrée sur la position $\vec{r}(t_n)$ de la goutte.
- **Stockage** : L'information encodée sous une forme ondulatoire est stockée durant un temps caractéristique de mémoire τ . A chaque période d'oscillation de l'onde, son amplitude s'amortit d'un facteur $e^{-1/\text{Me}}$ où $\text{Me} = \tau/T_F$.
- **Lecture** : à chaque impact, la goutte subie une force F_{ondes} égale à la résultante des forces exercée par l'ensemble des ondes générées :

$$F_{\text{ondes}}^{\rightarrow}(t_n) = F_0 \sum_{k=0}^n e^{\frac{t_n - t_k}{\text{Me}}} J_1(||\vec{\delta}r_{n-k}||) \vec{\delta}r_k \quad (8.8)$$

où F_0 est l'amplitude de force générée par un impact et $\vec{\delta}r_{n-k} = \vec{r}(t_n) - \vec{r}(t_k)$ est l'incrément de position entre le k-ème rebond et le n-ème.

On peut noter que dans le cas d'un marcheur où le champ associé est soumis à une équation d'onde, les propriétés d'interférence de h permettent également de mettre en évidence un processus d'**effacement** d'une information précédemment encodée, comme nous l'avons vu au chapitre 7.

Les propriétés d'un marcheur proviennent de la nature du support de la mémoire : le champ de surface h est une onde, solution de l'équation de Helmholtz. Existe-t-il des systèmes à mémoire régit par des équations similaires, mais où le champ h est est solution d'un autre type d'équation ?

Une fourmi en présence de nourriture laisse derrière elle des molécules odorantes nommées phéromones de recrutement [49, 50]. Si une seconde fourmi passe par un chemin déjà emprunté par la première elle sera attirée par les lieux où la concentration en phéromones déposées est maximale, et aura donc tendance à suivre le même chemin [51]. Ces phéromones permettent ainsi aux fourmis de communiquer à distance, en laissant derrière elles une trace de leur passage [46]. Le résultat est une optimisation du chemin reliant la source de nourriture à la fourmilière [24]. Deux fourmis (ou plus !) à la recherche de nourriture pourraient donc être considérées comme un système à mémoire, où le champ h est alors la concentration en phéromones déposées, régit par une équation de diffusion.

D'autres exemples où le champ h n'est pas solution d'une équation simple peuvent également être évoqués. Sur un champ de poudreuse vierge, le skieur à la recherche de sensations cherchera à éviter les traces laissées par les skieurs précédents. Il est ainsi soumis à une interaction répulsive avec le champ h de hauteur de la couche de neige, modifié par le passage de ses prédécesseurs. Il se produit un phénomène d'auto-organisation entre skieurs, via le stockage de ces informations sur la surface de neige : le résultat est un tassement de la poudreuse bien plus rapide que des passages non corrélés de skieurs.

Une fois la couche de neige fraîche tassée, il peut se produire un second mécanisme. Cette fois, le passage répété des skieurs érodent de manière inhomogène la couche de neige dure. Il se produit alors également un processus d'auto-organisation avec la formation de champs de bosses, autour desquelles les skieurs suivant vont tourner.

Pourrait-on classer les systèmes à mémoire en fonction de l'équation vérifiée par h ? Quels comportements peut-on attendre de ce genre de systèmes ?

Ces exemples mettent en évidence que les comportements observés dépendent du type de champ considéré, et du signe du couplage avec le mouvement des agents. Dans le cas d'un marcheur, sa spécificité provient du stockage via une mémoire d'origine ondulatoire. Des systèmes à mémoire analogue au marcheur pourraient être recherchés à partir d'un jeu d'équation du type :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\eta \vec{V} - \vec{\nabla}|_{\vec{\rho}=\vec{r}} E_p \quad (8.9)$$

$$E_p(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t E(\vec{\rho} - \vec{r}(s)) e^{-\frac{s-t}{\tau}} dt \quad (8.10)$$

$$L(E, \partial_t E, \partial_{tt} E, \partial_{xx} E, \dots) = 0 \quad (8.11)$$

L'équation 8.9 exprime le mouvement de la particule soumis au gradient d'un champ E_p qui lui est associé. En raison de la présence du gradient spatial $\vec{\nabla}$, E_p est une énergie potentielle pour la particule. L'équation 8.10 introduit un terme de mémoire, en considérant que l'énergie potentielle E_p peut être calculée comme une somme sur les contributions élémentaires E . τ correspond ici à un temps de cohérence.

Enfin, l'équation 8.11 donne l'équation d'évolution de E comme une équation aux dérivées partielles donnée par un opérateur linéaire L . Par exemple dans le cas d'un marcheur, on a $L = Id + \Delta$ où Δ est l'opérateur laplacien. Dans le cas de mouvements auto-organisés de recherche de nourriture par des fourmis, on aura $L = \partial_t - D\Delta$ où D est un coefficient de diffusion. Quel type de dynamique pourrait-on par exemple observer en choisissant pour L une équation de d'Alembert, $\partial_{tt} E - c^2 \Delta E = 0$?

Emergence spontanée d'un comportement probabiliste par augmentation de la cohérence temporelle

La dynamique d'un marcheur dans le régime de haute mémoire a mis en évidence l'émergence d'un chaos déterministe où la prédictibilité est perdue après un temps fini. Les deux mécanismes de perte de déterminisme par augmentation de la cohérence temporelle dans le cas d'une mémoire ondulatoire ont été étudiés au chapitre 5. Ils mériteraient néanmoins d'être étudiés plus en profondeur.

Du point de vue expérimental, il faudrait définir des outils statistiques permettant de décrire les trajectoires à très haute mémoire. Ceux ci pourraient alors être utilisés sur des trajectoires expérimentales. Un outil statistique de ce type est présenté dans la section suivante.

Pour étudier la perte de déterminisme, il est nécessaire de comprendre l'influence du bruit sur la dynamique. Pour cela, des expériences pourraient être réalisées, en ajoutant une composante aléatoire dans le courant traversant les bobines, afin de soumettre la goutte à une force aléatoire additive supplémentaire. En raison du stockage des positions sous la forme d'onde, il y aurait alors également modification de la force exercée par les ondes.

Des simulations numériques ont été entrepris avec Matthieu Labousse pour explorer cette dynamique complexe en étudiant l'influence d'un tel bruit sur la dynamique. Nous avons vu par exemple au chapitre 7 sur les auto-orbités qu'un bruit d'amplitude faible pouvait déstabiliser une trajectoire circulaire en l'absence de force extérieure.

Une étude numérique a également été initiée en ce sens avec Maxime Hubert, pour mesurer la sensibilité aux conditions initiales d'un marcheur. Le principe consiste à préparer deux conditions initiales pour un marcheur, et à mesurer leur divergence au cours du temps.

Pour cela, le champ d'onde est initialisé en considérant qu'une trajectoire a été préalablement suivie, par exemple un cercle de rayon R . L'évolution future de ce chemin est comparée avec celle du chemin voisin, de rayon $R + \delta R$. En mesurant la divergence entre ces deux trajectoires, on peut obtenir un coefficient de Lyapunov associé qui est une mesure de la chaoticité du système [81]. En augmentant la dimension de l'espace des conditions initiales, il est ainsi possible de caractériser le chaos que peut produire la mémoire ondulatoire, indépendamment de l'expérience considérée. Combien de modes est-il nécessaire de considérer pour prédire l'évolution de la trajectoire d'un marcheur ? Peut-on imaginer que le nombre de dimensions pertinentes diverge, rendant la dynamique d'un marcheur intrinsèquement probabiliste ?

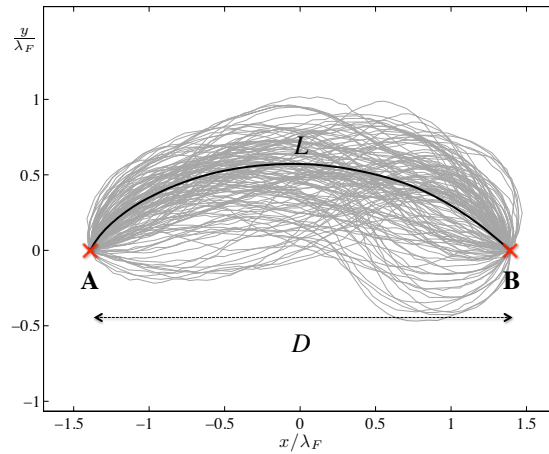


FIGURE 8.12 – **Méthode de mesure statistique : principe.** Par découpage d’une trajectoire chaotique, l’ensemble des chemins parcourus en un temps Δt à distance D fixée entre le point de départ et le point d’arrivées est sélectionné. Par rotation et translation individuelles, tous ces chemins peuvent être ramenés entre un point A et un point B fixe, situé sur l’axe $y = 0$, de part et d’autre du centre. Ils correspondent ici à $\Delta t = 2.5$ s et $D = 2.78\lambda_F$.

Modèle statistique et intégrale de chemin

L’émergence d’une dynamique chaotique pour un marcheur nous a déjà amené au chapitre 5 à adopter un point de vue probabiliste. Les expériences réalisées avaient alors mis en évidence une persistance des trajectoires correspondant aux états propres au sein de cette dynamique chaotique. Il existe donc, même dans une dynamique chaotique d’un marcheur, une structure statistique sous jacente, différente par exemple de celle d’un mouvement brownien. Que peut on dire de cette dynamique d’un point de vue statistique ?

Pour cela, une trajectoire expérimentale peut être découpée par morceau afin de rechercher l’ensemble des chemins qui relie un point A à un point B distant d’une distance D donné, en un temps Δt fixé. La figure 8.12 illustre le principe d’une telle mesure sur une trajectoire expérimentale chaotique pour $\Delta t = 2.5$ s et $D = 2.78\lambda_F$. Par rotation et translation, l’ensemble des chemins individuels correspondant à ce couple $(D, \Delta t)$ donné peut être ramené entre deux points fixes A et B. Les positions de A et B et la direction du vecteur \vec{AB} par rapport au centre de symétrie du potentiel n’ont pas été prises en compte. Ces chemins ne sont donc plus comparables du point de vue de la force centrale exercée le long des chemins, mais ils le sont vis à vis des champs d’ondes associés.

Cette méthode peut être appliquée à un enregistrement long (120000 rebonds) obtenu dans un régime de très haute mémoire ($Me \approx 200$), pour un confinement $\Lambda \approx$

1 correspondant à une intermittence entre modes $n = 1$, $n = 2$ et $(n, m) = (3, \pm 1)$. La figure 8.13 présente quelques faisceaux de chemin caractéristiques obtenus pour la même distance $D = 0.87\lambda_F$ entre point de départ et d'arrivée mais des durées Δt de transition différentes ($\Delta t = 1.3, 2.1, 3.1$ et 3.6 s). La colonne de gauche présente les chemins mesurés (gris) et les trajectoires correspondant aux maxima locaux de probabilités (noir). La colonne de droite correspond aux distributions de probabilités associées en niveaux de couleur.

On observe l'émergence de trajectoires particulières, qui correspondent aux structures des états propres précédemment définis. Notons que ces graphes présentent une symétrie haut/bas par construction, mais pas nécessairement droite/gauche en raison de l'irréversibilité de la dynamique longitudinale.

Cette représentation en terme de chemins de transition ouvre la voie vers une description de la dynamique locale en terme d'*intégrale de chemin*. Pour décrire ces chemins comme une probabilité de transition d'un point A à l'instant t en un point B à l'instant $t + \Delta t$ on définit donc une probabilité $p(\vec{r}_0, t)$ d'être en un point de coordonnées \vec{r}_0 à l'instant t . La probabilité $p(\vec{r}_0 + \vec{u}, t + \Delta t | (\vec{r}_0, t))$ d'être en $\vec{r}_0 + \vec{u}$ à l'instant $t + \Delta t$ sachant que l'on était en \vec{r}_0 à l'instant t peut être reliée à la probabilité $p(\vec{r}_0, t)$ d'être en \vec{r}_0 à l'instant t par une expression de la forme :

$$p(\vec{r}_0 + \vec{u}, t + \Delta t | (\vec{r}_0, t)) \sim \int \mathcal{D}r \rho_r(\vec{u}) p(\vec{r}_0, t) \quad (8.12)$$

où $\vec{u} = \vec{AB}$ représente le vecteur reliant le point A au point B, le terme $\int \mathcal{D}r$ représente une intégrale sur l'ensemble des chemins possibles reliant A à B, et $\rho_r(\vec{u})$ est la densité de probabilité associée aux chemins $\vec{r}(t')$ reliant A à B en Δt . La colonne de droite de la figure 8.13 présente ainsi une mesure de cette fonction $\rho_r(u)$ associée aux chemins de transition d'un point A vers un point B en un temps Δt .

La description de comportements stochastiques en terme d'intégrale de chemin fût introduite par R. Feynman dans les années 40 pour décrire le mouvement des particules quantiques à l'aide d'un formalisme local en temps et en espace [37]. Cette formulation est à la base des théories quantiques relativistes, comme l'électrodynamique quantique.

Cette formulation statistique se base sur les probabilités de transitions élémentaires $\rho_{\vec{\delta}r}$ de (\vec{r}_0, t) à $(\vec{r}_0 + \vec{\delta}r, t + \delta t)$. Savoir calculer ces probabilités de transition revient à connaître l'évolution statistique de la densité de probabilité. Par exemple dans le cas d'une particule quantique libre, R. Feynman montra que $\rho_{\vec{\delta}r} = e^{iS[\delta r]}$ où S représente l'action correspondant au chemin δr , et que ce résultat est équivalent à une équation de Schrödinger pour la densité de probabilité $\psi(\vec{r})$ de la particule. Ce modèle d'intégrale de chemin est aussi utilisé pour des systèmes classiques où $\rho_{\vec{\delta}r}$ correspond à un poids de Boltzmann de type $e^{-\beta \delta E}$ avec β une température inverse, et δE la différence d'énergie entre A et B.

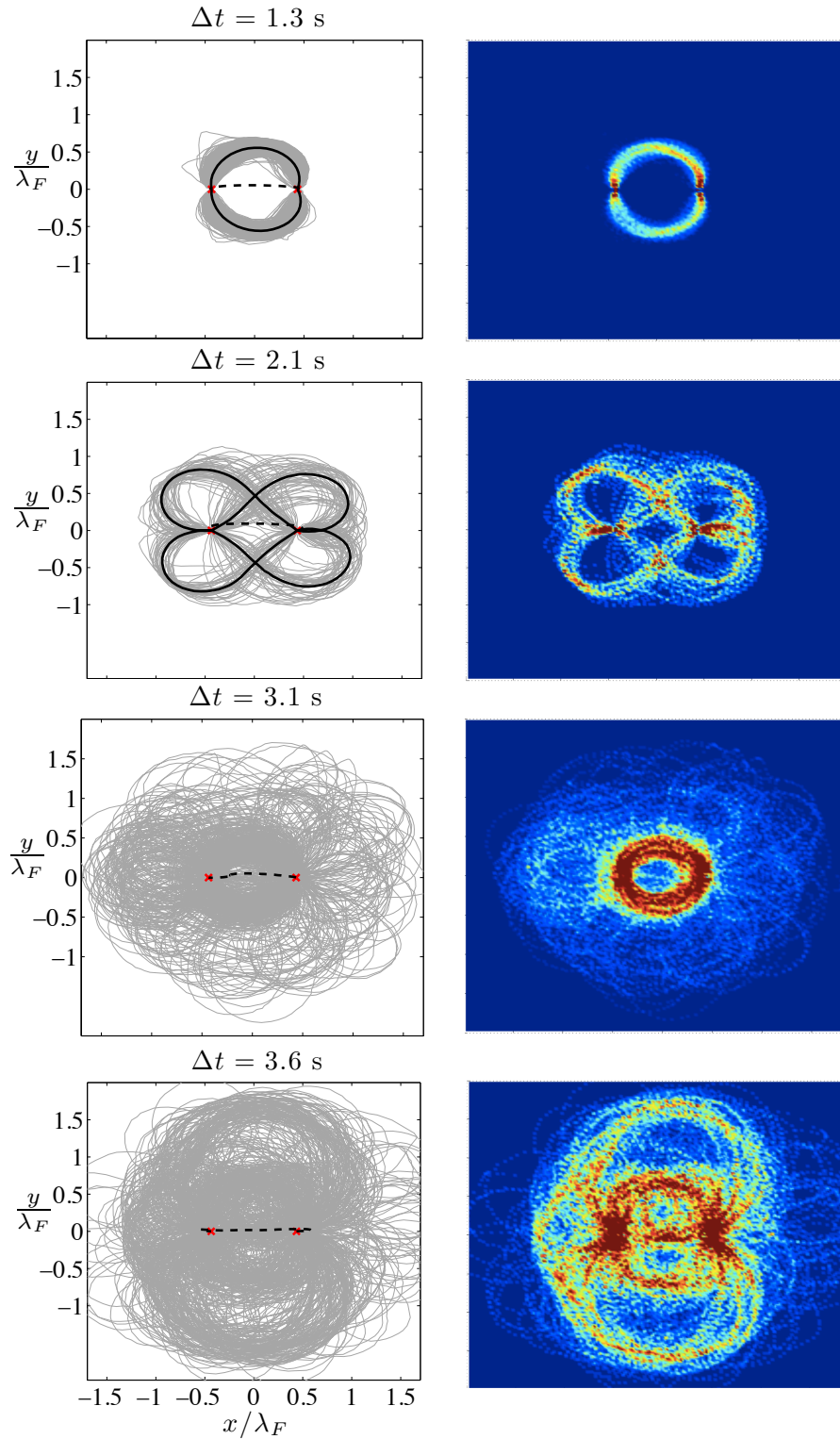


FIGURE 8.13 – **Chemins de transitions entre A et B mesurés par découpage d’une trajectoire chaotique de $N=120000$ rebonds.** Colonne de gauche : trajectoires expérimentales (gris), et trajectoires correspondant aux maxima de probabilités (noir). Colonne de droite : distribution de probabilité de présence associée à ces jeux de trajectoires. Distance entre point de départ A et point d’arrivée B : $D = 0.87 \pm 0.01\lambda_F$ et durée Δt de parcours d’un chemin ($\Delta t = 1.3, 2.1, 3.1$ et 3.6 s). Les traits pointillés correspondent à la moyenne de l’ensemble des chemins, qui correspond au segment AB par construction (aux fluctuations près).

Il serait intéressant dans le cas du marcheur de faire un lien entre la probabilité d'occurrence d'une transition entre A et B et la variation d'une grandeur associée au champ d'onde d'un marcheur, comme par exemple le champ $\Delta h = h(B) - h(A)$. Notons que cette différence dépend des chemins précédemment suivis en raison de la partie d'origine ondulatoire conférée par l'interaction de la goutte avec son champ d'onde. Une condition de minimisation de l'excitation rendrait probable les chemins tels que $\int h(s)ds$ généré le long du chemin suivi soit minimum. Cette intégrale est elle analogue à un terme d'action S d'origine ondulatoire ? Quelle serait l'expression de cette action ? Comme se calculerait la probabilité de transition à partir de ces actions S individuelles ?

Il demeure tout de même une différence de taille : en raison de l'entretien du mouvement par les ondes, la dynamique d'un marcheur n'est pas conservative. L'espace des chemins est donc réduit à un sous espace où la vitesse de parcours varie peu autour d'une valeur moyenne. Pour pousser le parallèle, il serait nécessaire de relâcher cette contrainte de vitesse, en imaginant un "marcheur conservatif" présentant le même type de propriétés que le marcheur expérimental.

Lien avec la théorie de l'onde pilote de De Broglie

Les propriétés statistiques d'un marcheur mettent en évidence des comportements de type ondulatoire, comme la sélection de modes de trajectoires dans une dynamique chaotique correspondant aux états propres.

La dynamique d'un marcheur est ainsi caractérisée par l'existence de deux ondes de nature très différentes. La première correspond à l'onde physique excitée par la goutte sur son chemin, et qui pilote son mouvement. La seconde est plus abstraite : elle détermine les probabilités de mesure de tel ou tel état. Cette double solution apparaît très similaire à celle imaginée par de Broglie pour décrire le mouvement des particules quantiques. A ce titre, il est utile de présenter un bref historique de cette théorie, souvent assimilé à tort comme la théorie de de Broglie-Bohm. La présentation qui suit est inspirée d'une description de E. Fort et Y. Couder [16] des modèles de Broglie-Bohm.

En 1925, Louis de Broglie associa à chaque particule de masse m_0 au repos une énergie ondulatoire [19] telle que :

$$m_0 c^2 = h \nu_0 \quad (8.13)$$

où c est la célérité de la lumière dans le vide, h la constante de planck, et ν_0 une fréquence caractéristique de la particule. La particule est alors considérée comme une singularité d'un champ d'onde de longueur d'onde $\lambda_{dB} = h/mV$. Ce champ est la

superposition d'une onde radiative émise, l'onde retardée, et d'une onde convergeant vers la particule, l'onde avancée. Dans ce modèle, le mouvement de la particule est guidée par une onde. L'équation d'évolution des positions x_i de la particule s'écrit :

$$m \frac{dx_i}{dt} \propto \vec{\nabla}_i \phi \quad (8.14)$$

où ϕ est la phase de l'onde pilote et ∇_i le gradient dans la direction x_i . Une telle association du mouvement d'une particule ponctuelle à un champ d'onde qui l'entoure permet d'observer des comportements non-newtoniens.

Inspiré par ces travaux, Erwin Schrödinger introduisit une équation régissant l'évolution de l'onde proposée par de Broglie. Max Born montra plus tard que cette équation de Schrödinger était en fait reliée à une onde de *probabilité de présence*, sans réalité physique. De Broglie suggéra alors que dans les systèmes quantiques, deux ondes coexistaient :

- Le premier champ d'onde est généré par le passage de la particule elle même. Il s'agit d'une onde physique, présentant une singularité là où la particule se trouve. Pour de Broglie, cette particule possède des trajectoires définies. Elle peut être soumise à une force extérieure, mais l'association de cette onde pilote lui confère une sensibilité non locale à son environnement.
- Le second champ d'onde ψ est une solution linéaire de l'équation de Schrödinger. Elle décrit le comportement statistique de la particule, sous la forme d'une densité de probabilité de présence.

Cette théorie est appelée la *double solution* de de Broglie. Elle a été reprise en partie par David Bohm, afin de rechercher des trajectoires de particules à partir de l'équation de Schrödinger. A partir de la transformée de Madelung, D. Bohm obtint une équation analogue à celle de de Broglie, mais dont les trajectoires sont celles des maxima de probabilités, *i.e.* les trajectoires les plus probables.

Le but d'une théorie du type de D. Bohm consiste à rechercher, à partir de l'équation statistique de Schrödinger, quelle structure sous jacente permettrait de décrire le mouvement de la particule elle même. Il n'est cependant pas évident qu'une telle question est du sens, en raison de la non localité de la mécanique quantique, telle qu'elle a été révélée par les expériences d'Aspect [3]. A l'heure actuelle, la théorie de D. Bohm est cependant équivalente à l'eq. de Schrödinger, et n'est pas en contradiction avec la violation des inégalités de Bell.

Pour un marcheur, système purement classique, la démarche est inverse de celle de Bohm : peut-on, à partir d'une dynamique connue couplant une onde et une particule obtenir une équation régissant la probabilité de présence de la particule ? La formulation en terme d'intégrale de chemin de la dynamique d'une particule couplée à un champ via un effet de mémoire est, je pense, une piste intéressante d'exploration future.

Annexe A

Méthode de calibration de la force

A.1 Principe

Pour calibrer la force magnétique exercée sur une goutte dont la quantité de ferrofluide encapsulée est inconnue, on se propose d'étudier son mouvement dans le champ d'un aimant en dessous du seuil de marche. Dans ce régime, nous verrons que la goutte peut être considérée comme un oscillateur harmonique. Pour mesurer sa fréquence caractéristique, et donc la force exercée, il suffit alors d'étudier sa réponse en fréquence. Les mesures ainsi obtenues permettront d'en déduire, avec une bonne précision, la force réelle exercée sur un marcheur. La première partie présente le principe de la mesure, la seconde son application.

A.1.1 Dynamique d'une goutte non marcheuse dans le champ d'un aimant

Pour une goutte rebondissante, il existe deux phases du mouvement. L'une correspond à un mouvement parabolique, isolé. l'autre correspond à une période de glissement sur la surface du bain, qui génère de la dissipation. On se propose de modéliser ces deux comportements par une seule équation moyenne, en définissant une masse m_{eff} effective de la goutte, et un coefficient de friction effectif η_{eff} d'interaction avec le bain. Dans ce modèle simplifié, l'équation de la dynamique d'une goutte non marcheuse s'écrit simplement :

$$m_{eff} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\eta_{eff} \frac{d\vec{r}}{dt} + F_{mag} \quad (\text{A.1})$$

où F_{mag} représente la force magnétique extérieure exercée. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, $F_{mag} = -k\vec{r}$, et la dynamique de la goutte se résume à l'équation d'un oscillateur du second ordre :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{2\omega_0}{Q} \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = 0 \quad (\text{A.2})$$

où Q désigne le facteur de qualité effectif, et ω_0 la pulsation caractéristique. Ces deux paramètres sont donnés en fonction des grandeurs physiques du problème :

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{m} \quad (\text{A.3})$$

$$Q = \frac{2m\omega_0}{\eta_{eff}} \quad (\text{A.4})$$

Notons que, bien qu'inconnue, la pulsation caractéristique peut être reliée au profil de champ magnétique mesuré expérimentalement via la constante de raideur magnétique $a(d, B_0)$:

$$\omega^2 = \frac{2V\chi_0}{m\mu_0} a(d, B_0) \quad (\text{A.5})$$

Pour revenir à la force exercée, il faut donc être capable de mesurer la pulsation caractéristique ω_0 de cet oscillateur. Plusieurs mesures de ω_0 , pour des valeurs différentes de a permettront au passage de valider le passage d'un champ magnétique imposé à une force magnétique effectivement exercée.

A.1.2 Méthode de calibration : principe

Pour mesurer la pulsation caractéristique d'un oscillateur, une méthode couramment utilisée consiste à se placer en régime forcé. En appliquant une force extérieure périodique, un système linéaire est astreint à vibrer à cette même fréquence. En mesurant la réponse en fréquence de l'oscillateur, il est possible de déduire avec une bonne précision la fréquence caractéristique du système étudié.

Dans le cas d'une goutte sous le champ d'un aimant, un tel forçage peut être obtenu simplement en faisant osciller dans le temps la position de l'aimant. Nous allons voir qu'un tel dispositif se ramène bien à l'étude d'un oscillateur harmonique forcé.

Goutte soumise à une oscillation forcée

La force exercée par l'aimant sur la goutte dépend de la distance r entre le centre de gravité de la goutte et l'axe de symétrie de l'aimant. Pour un aimant se déplaçant dans le temps, dont la position $X(t)$ varie au cours du temps selon l'axe X , la force exercée sur la goutte située en $x(t)$ s'écrit :

$$F_m = -m\omega_0^2(x - X(t)) \quad (\text{A.6})$$

en se plaçant à une dimension d'espace (mouvements rectilignes de l'aimant). Par linéarité de la force exercée, l'équation de la dynamique d'une goutte soumise à cette force oscillante devient, à une dimension d'espace :

$$\ddot{x} + \frac{2\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X(t) \quad (\text{A.7})$$

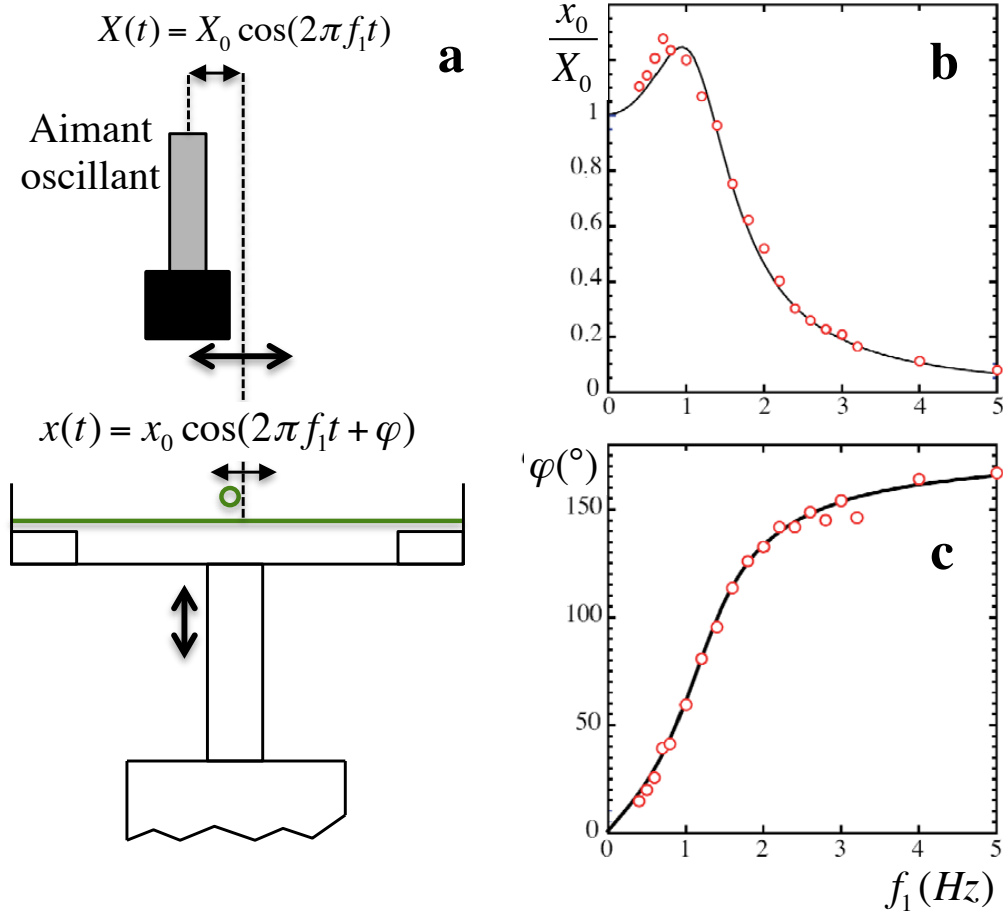


FIGURE A.1 – **Méthode de calibration de la force.** a) Pour une vibration verticale $\gamma < \gamma_W$ située sous le seuil de marche, l'aimant est soumis à une oscillation horizontale au cours du temps, $X(t) = X_0 \cos(2\pi f_1 t)$. La goutte se met alors à osciller horizontalement à la même fréquence de forçage f_1 . b) et c) Module et argument de la fonction transfert d'une goutte sous un aimant oscillant pour une distance $d = 32mm$ et un champ magnétique $B_0 = 30G$. La fréquence caractéristique f_0 de cet oscillateur est obtenue grâce à la courbe de déphasage, en remarquant que $f_1 = f_0$ pour un déphasage $\phi = \pi/2$ entre la goutte et l'aimant. On trouve $f_0 = 1.2 \pm 0,05$ Hz, permettant ainsi de calibrer ce dispositif expérimental.

Le déplacement de l'aimant permet donc de forcer le mouvement de la goutte à une fréquence f quelconque. Un oscillateur de ce type étant linéaire, le système devrait osciller à la fréquence caractéristique imposée après un régime transitoire. Le régime permanent est alors entièrement décrit par la réponse de la goutte à une amplitude et une fréquence de forçage données.

Mesure directe de la pulsation caractéristique ω_0

Une méthode usuelle de mesure de la pulsation caractéristique ω_0 consiste à tracer la fonction transfert $H(\omega) = x/X$ du système, rapport entre amplitude d'oscillation de la goutte et celle de l'aimant en fonction de la pulsation de forçage ω . On trace alors le gain A et le déphasage ϕ pour connaître les paramètres caractéristiques de notre oscillateur. A partir de l'équation A.7, l'expression analytique de A et ϕ peuvent être obtenus sous la forme :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (\text{A.8})$$

$$\phi = -\arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad (\text{A.9})$$

Il suffit alors de comparer les résultats obtenus aux expressions théoriques, et d'en déduire la valeur des paramètres ω_0 et Q . Pour un oscillateur faiblement amorti ($Q > 5$ environ), la fréquence de résonance f_r du système correspond à la pulsation caractéristique f_0 . Pour un oscillateur dont le facteur de qualité est plus faible, l'amortissement décale la fréquence de résonance vers les basses fréquences. La mesure de la fréquence f_r au pic de résonance introduira alors une erreur systématique non négligeable. Dans ce régime amorti, il est préférable de mesurer le déphasage entre forçage (position X de l'aimant) et mobile (position x de la goutte), et de repérer la fréquence pour laquelle le déphasage vaut $\pi/2$. Suivant le cas, il faudra donc mesurer f_0 à partir du gain ou du déphasage.

A.2 Réalisation expérimentale du dispositif de calibration

A.2.1 Dispositif

L'aimant est attaché à une tige métallique, fixée à un pot vibrant. Le pot vibrant est lui même monté sur une table de translation micrométrique verticale, permettant de faire varier la distance entre l'aimant et la surface du bain avec une bonne

précision. L'aimant peut ainsi être mis en mouvement par l'intermédiaire du pot vibrant à l'aide d'un générateur basse fréquence. Le résultat est une oscillation sinusoïdale horizontale de la position $X(t)$ de l'aimant, d'amplitude X_0 et de fréquence f voulue. Pour toute cette série d'expérience, on choisit de se placer sous le seuil de marche, afin d'éviter tout couplage avec les ondes stationnaires de Faraday. Une caméra permet alors d'enregistrer le mouvement de la goutte et de l'aimant au cours du temps. Leur position respective est ensuite détectée en temps réel via un algorithme de détection. Le gain et le déphasage de la goutte par rapport à l'aimant en fonction de la fréquence, de la distance à l'aimant, ou du champ créé par les bobines peuvent alors être mesurés.

A.2.2 Résultats

Le dispositif de calibration permet alors de mesurer la réponse. La section ci-dessous présente les différents résultats obtenus par cette méthode, qui permettent à la fois de calibrer le dispositif, et de vérifier la validité du modèle de force exercée sur la goutte.

Courbes de résonance

La première expérience a consisté à mesurer le gain et le déphasage en fonction de la fréquence, pour une goutte donnée. Une courbe expérimentale caractéristique est présentée en figure A.1. À partir de ces courbes, il est possible d'interpoler une fonction réponse d'un oscillateur harmonique du second ordre, en ajustant la valeur du facteur de qualité Q et de la pulsation caractéristique ω_0 . La courbe rouge présente un tel ajustement, pour $Q = 1.05 \pm 0.1$ et $f_0 = 1.26 \pm 0.1$ Hz. Les courbes mesurées correspondent bien à la réponse d'un oscillateur harmonique du second ordre.

Ce type de courbe permet donc de mesurer, en validant la méthode utilisée, la pulsation caractéristique ω_0 de cet oscillateur. En revanche, les informations sur le facteur de qualité et donc l'amortissement visqueux effectif de la goutte rebondissante, n'ont pas été exploitées. Compte tenu de la valeur du facteur de qualité, de l'ordre de 1, il est plus précis de mesurer la pulsation caractéristique à partir de la courbe de déphasage. C'est donc cette seconde représentation qui a été retenue par la suite. Pour une même goutte, la courbe de déphasage a alors été mesurée en fonction de différentes distances à l'aimant. La figure A.5 présente trois courbes de déphasage obtenues pour $d=29.6, 32$ et 34.4 mm. Chacune d'elles correspond à la courbe d'un déphasage d'un oscillateur harmonique, dont la fréquence caractéristique diminue lorsque la distance goutte/aimant augmente. Cette tendance, attendue par

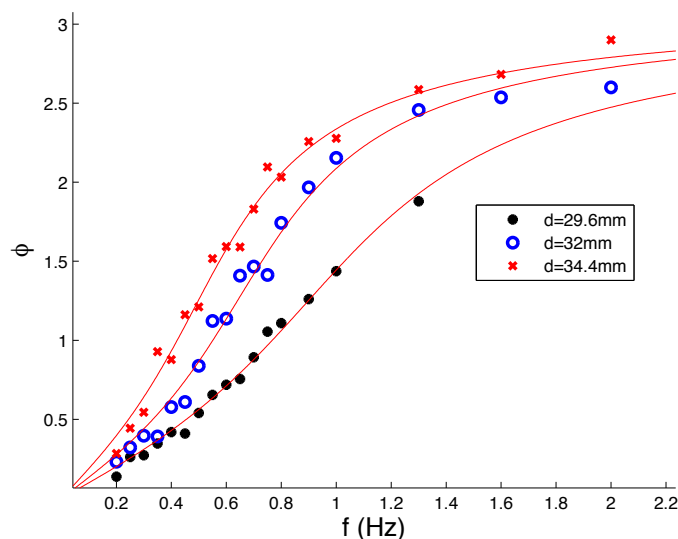


FIGURE A.2 – **Déphasage en fonction de la raideur imposée.** Courbes du déphasage ϕ pour $d = 29.6, 32$ et 34.4 mm. La fréquence caractéristique f_0 diminue lorsque l'aimant est éloigné, comme le suggère l'expression de ω_0 (cf equation A.7).

l'équation A.7, est donc validée expérimentalement.

D'une goutte à l'autre, la fréquence caractéristique f_0 peut également être différente pour une même distance. Ces variations sont imputables à un rapport différent entre volume V de ferrofluide encapsulé et masse totale m de la goutte. La concentration $c = V/m$ en ferrofluide n'est donc pas identiques pour toutes les gouttes, ce qui justifie là encore l'utilisation d'une méthode de calibration.

Mesurer à chaque fois l'ensemble de la courbe de déphasage est cependant fastidieux et peu utile. Repérer la fréquence pour laquelle le déphasage vaut $\pi/2$ suffit à remonter à la valeur de la fréquence caractéristique f_0 , et donc à la concentration en ferrofluide contenu. La détection informatique a donc été adaptée pour afficher en temps réel le déphase entre goutte et aimant. Ainsi, il est possible de faire varier en dynamique la fréquence f imposée pour rechercher rapidement la valeur pour laquelle les deux signaux sont en quadrature de phase, avec une précision de l'ordre du pour cent sur la mesure de f_0 .

Les premières courbes de résonance obtenues montrent donc que la dynamique de la goutte peut bien être modélisée par l'équation d'un oscillateur amorti forcé. De plus, la fréquence pour laquelle goutte et aimant sont en quadrature de phase correspond à la fréquence caractéristique d'oscillation, et donne donc une mesure précise de la force exercée sur une goutte. Ce procédé de calibration, bien que fastidieux, est robuste : pour chaque goutte sous le seuil de marche, il suffit de faire osciller l'aimant en quadrature de phase pour en déduire la force exercée. Il est cependant utile d'aller un peu plus loin dans l'exploitation de cette méthode de calibration.

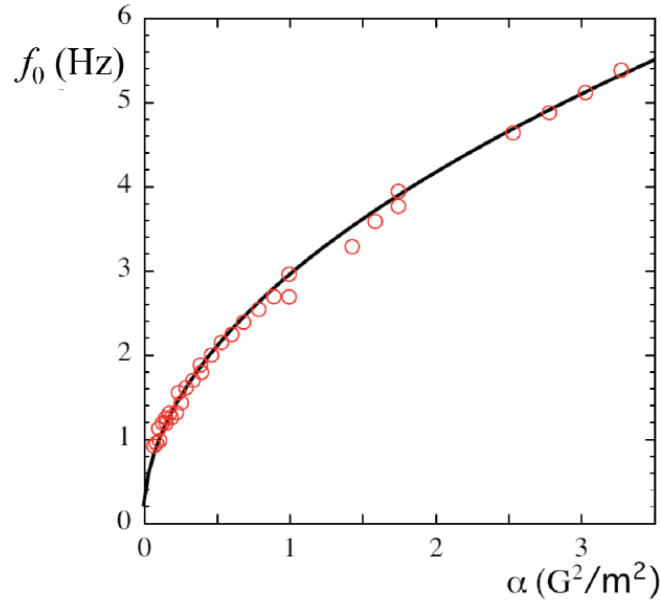


FIGURE A.3 – Vérification expérimentale de la raideur du puits de potentiel. Fréquence caractéristique f_0 mesuré par la méthode du déphasage en fonction de la courbure a du profil de B^2 . L'expérience a été réalisée sur une seule goutte, en faisant varier à la fois la distance d entre l'aimant et la surface liquide, et le champ magnétique B_0 . La courbe noire correspond à un ajustement avec un paramètre ajustable, le volume de ferrofluide encapsulé dans la goutte. Le bon accord entre théorie et expérience valide les formules utilisées pour le calcul de la raideur du puits de potentiel à partir des mesures du champ magnétique.

Vérification expérimentale de la force exercée

Une fois la technique de mesure de la pulsation caractéristique ω_0 mise au point, il est possible de tirer partie du dispositif à d'autres fins. En particulier, on se propose de vérifier l'expression de la force magnétique appliquée en fonction de la distance à l'aimant et du champ magnétique imposé. Une telle mesure n'est pas indispensable, mais elle permet de s'assurer de la validité du processus de calibration, autant que de la force réelle exercée sur le marcheur. Pour cela, on rappelle l'expression de la pulsation caractéristique ω_0 en fonction des paramètres physiques du problème :

$$\omega_0^2 = \frac{2V\chi_0}{m\mu_0}a(d, B_0) \quad (\text{A.10})$$

où a désigne la courbure du profil de B^2 . Comme la constante de raideur magnétique a dépend à la fois de la distance d et B_0 , la fréquence caractéristique f_0 a été mesurée en faisant varier ces deux paramètres à la fois. La figure A.3 présente les résultats d'une telle expérience. La courbe noire correspond à un modèle en \sqrt{a} avec un paramètre ajustable : la concentration c en ferrofluide dans la goutte. Un bon

accord entre théorie et expérience est obtenu, ce qui valide la technique de mesure de la force appliquée à une goutte.

Par ailleurs, d'autres expériences qualitatives ont été réalisées pour explorer les limites du modèle d'oscillateur harmonique du second d'ordre. En augmentant l'amplitude d'oscillation de l'aimant, on s'attend à voir apparaître des oscillations anharmoniques de la goutte sous l'aimant, qui peuvent modifier la fréquence d'oscillation de la goutte. Cet effet n'a pas été observé dans la gamme d'amplitudes accessibles (jusqu'à 1cm d'amplitude crête à crête).

En faisant varier l'excitation du bain, la goutte est susceptible changer de régime de rebond, ce qui pourrait modifier la fraction du temps passer en l'air, et donc les coefficients effectifs définis en introduction de cette méthode. On remarque que l'inertie augmente légèrement avec l'amplitude γ d'excitation du pot vibrant, mais la variation est faible (de l'ordre de 1 pour cent entre $\gamma/g = 2$ et $\gamma/g = 3$). Une discontinuité de l'inertie apparente n'a pas non plus été mis en évidence au changement de type de rebond (entre simple et double).

A.3 Champ magnétique généré par un aimant cylindrique

L'axe de symétrie de l'aimant est noté z , la distance à l'axe repéré par r . Les deux composantes B_r et B_z sont mesurées séparément, selon r et z . On obtient ainsi le champ B crée en tout point de l'espace $M(r, z)$ par l'aimant cylindrique. Afin de réutiliser ces mesures de champ magnétiques, les courbes expérimentales ont été modélisées par une formule analytique. Le calcul n'est pas présenté ici en détail. On considère uniquement le champ crée par un segment de longueur a de dipôle linéique $\mu = m/a$ où m correspond au dipôle magnétique total. En considérant qu'à grande distance, chaque élément crée un champ magnétique dipolaire, et en sommant les contributions de chaque dipôle élémentaire, on obtient une formule analytique du champ crée par un barreau fin dans un plan. En utilisant la symétrie de rotation (à vérifier), on obtient finalement le champ crée par un disque aimanté de rayon b .

$$B_r(z, r) = \frac{B_{0r}}{z^2} \left(\left(\left(\frac{r-b/2}{z} \right)^2 + 1 \right)^{-3/2} - \left(\left(\frac{r+b/2}{z} \right)^2 + 1 \right)^{-3/2} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$B_z(z, r) = B_0 + \frac{B_{0z}}{z^2} f \left(\frac{r-b/2}{z}, \frac{r+b/2}{z} \right) \quad (\text{A.12})$$

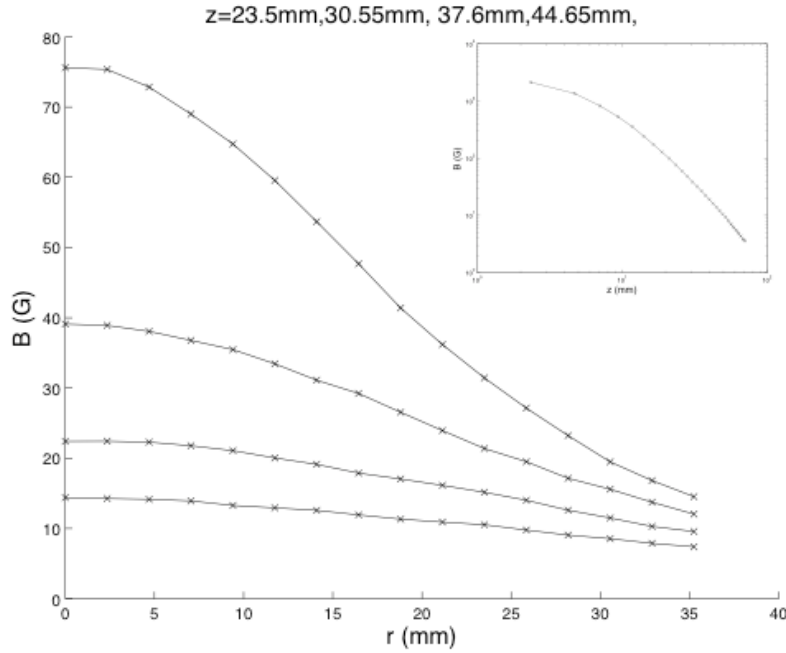


FIGURE A.4 – Champ magnétique généré par un aimant cylindrique. Champ total B créée par un aimant de diamètre $a=15$ mm et d'épaisseur $e=5$ mm en fonction de la distance à l'axe de révolution r , pour différentes distance z à l'aimant. Graphe inséré : champ magnétique total B crée sur l'axe de révolution en fonction de z en échelle logarithmique : à grande distance, le champ décroît en $1/z^2$. Ces courbes peuvent être interpolées par les équations A.11 et A.12.

où f est une fonction trop longue pour tenir dans la marge :

$$B_z(z, r) = B_0 + \frac{B_{0z}}{z^2} \left(\tanh^3 \left(\operatorname{asinh} \left(\frac{r + b/2}{z} \right) \right) \right) \quad (\text{A.13})$$

$$- \tanh^3 \left(\operatorname{asinh} \left(\frac{r - b/2}{z} \right) \right) \quad (\text{A.14})$$

$$+ 2 \tanh \left(\operatorname{asinh} \left(\frac{r - b/2}{z} \right) \right) \quad (\text{A.15})$$

$$- 2 \tanh \left(\operatorname{asinh} \left(\frac{r + b/2}{z} \right) \right) \Bigg) ; \quad (\text{A.16})$$

Ces formules analytiques correspondent bien aux données expérimentales dès que la distance à l'aimant est supérieure au diamètre, *i.e.* $d > 15$ mm. Pour des grandes distances, on retrouve bien un champ qui décroît en $1/z^2$ (en pratique, pas tout à fait : j'ai utilisé un exposant 1.85 pour B_r et 1.91 pour B_z pour coller au mieux avec les données expérimentales).

Comme le montre la figure A.4, un aimant cylindrique crée un champ magnétique lentement variable dans l'espace, avec un maximum de champ dans l'axe de

révolution. Au voisinage du maximum on peut considérer que le champ magnétique varie quadratiquement avec la distance r à l'axe de révolution. Ce type de configuration permet d'appliquer une force de rappel type ressort sur une goutte chargée en ferrofluide.

A.4 Composante verticale de la force magnétique

L'utilisation d'un unique aimant pour confiner le marcheur génère également une force verticale appliquée sur la goutte. Opposée à la gravité, son effet est moindre que la force horizontale. Cependant, son effet peut être décelé par une diminution de la vitesse de la goutte. En effet, l'application d'une force verticale diminue la gravité effective, ce qui diminue l'énergie cinétique à l'impact et donc l'amplitude des ondes générées.

La cartographie de champ magnétique effectuée permet de calculer le rapport entre la force verticale F_v et la force horizontale F_h appliquée en fonction de la distance au centre (figure A.5a). On observe une croissance linéaire, pour une valeur maximale de l'ordre de 0.1.

Grâce à la méthode de calibration utilisée pour calculer la force horizontale, la force verticale est connue sans aucun paramètre ajustable. Cette force F_v peut être ramenée à l'accélération de gravité g , comme le montre la figure A.5b. Pour les confinements les plus élevés ($\Lambda = 0.3$), la modification effective de la gravité est de l'ordre de 20%¹.

Enfin, l'effet de cette force verticale sur la vitesse du marcheur est donné en figure A.5c, en fonction du ration F_v/g . Du point de vue du marcheur, cette modification de gravité induit donc une variation linéaire de la vitesse de la goutte. L'origine de cette pente constante n'a pas été élucidé. Les effets sur la vitesse du marcheur reste relativement faible, dès que $\Lambda > 0.5$. En pratique, les orbites étant sélectionnées par la longueur d'onde de Faraday, des variations de vitesse d'une orbite à l'autre ne change pas les résultats obtenus.

1. A confinement encore plus faible, la diminution de la gravité effective peut être utilisée pour modifier le régime de rebond d'une goutte sans changer l'accélération du pot vibrant. Des triplements voire quadruplements de période ont ainsi pu être observés.

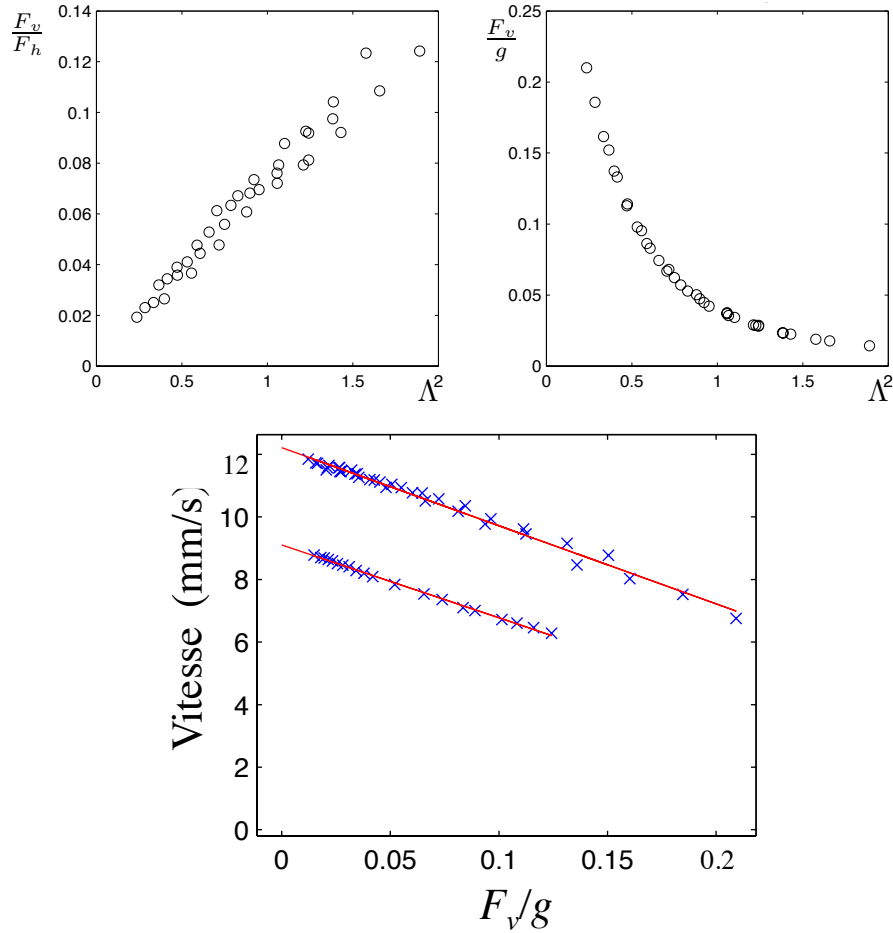


FIGURE A.5 – **Force verticale exercée sur la goutte.** Mesures effectuées sur des trajectoires obtenues dans le régime de marcheur amnésique (Chapitre 3), où la goutte suit un mouvement circulaire uniforme. $\Lambda = V/(\lambda_F \omega)$ désigne le paramètre de confinement. a) Mesure du rapport F_v/F_h entre force verticale F_v et force horizontale F_h exercée en fonction de Λ . b) Valeur de la force verticale rapportée à l'accélération de gravité g . c) Vitesse de la goutte, pour deux gouttes différentes, en fonction de la modification de la gravité induite F_v/g . On observe une décroissance linéaire de la vitesse. La courbe rouge correspond à un ajustement linéaire.

Annexe B

Limite du marcheur amnésique : une masse additionnelle d'origine ondulatoire

Pour le lecteur courageux, la partie qui suit s'attarde sur l'obtention, par le calcul, de l'équation 3.12 obtenue par des arguments de symétrie. Outre la justification du modèle à partir des équations connues du champ d'onde, cette approche permet de mettre en évidence l'apparition de forces qui ne dépendent pas que de la vitesse, mais aussi de l'accélération de la goutte. Ce second terme est responsable de l'écart de 20% observé entre l'inertie d'une goutte rebondissante et l'inertie d'un marcheur.

B.1 Dérivation du terme d'inertie additionnel

B.1.1 Passage du discret au continu

Mouvement vertical en deux phases

Vol libre :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 \mathbf{r} \quad \text{de } 0 \text{ à } \alpha T \quad (\text{B.1})$$

Pendant le contact avec le bain :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 \mathbf{r} - \gamma_0 \mathbf{v} + \gamma_0 \tilde{\nabla} \mathbf{h} \quad \text{de } \alpha T \text{ à } T \quad (\text{B.2})$$

Bilan sur une période :

$$(\delta v)_1 = -\omega^2 \mathbf{r} \alpha T \quad \text{de } 0 \text{ à } \alpha T \quad (\text{B.3})$$

$$(\delta v)_2 = -\omega^2 \mathbf{r} (1 - \alpha) T - \gamma_0 \mathbf{v} (1 - \alpha) T + \gamma_0 (1 - \alpha) \tilde{\nabla} h \quad \text{de } \alpha T \text{ à } T \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = ((\delta v)_1 + (\delta v)_2) / T \quad (\text{B.5})$$

$$= -\omega^2 \mathbf{r} - \gamma_0 (1 - \alpha) \mathbf{v} + \gamma_0 (1 - \alpha) \tilde{\nabla} h \quad (\text{B.6})$$

Equation du mouvement après moyenne sur une période :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 \mathbf{r} - \gamma_0 \mathbf{v} + \gamma_0 \vec{\nabla} h \quad (\text{B.7})$$

B.1.2 Développement de la force due aux ondes

Le champ d'onde s'écrit :

$$h = h_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_F ||\vec{\delta}r_n||) e^{-n/M} \quad (\text{B.8})$$

Développement de Taylor de l'argument, on définit $\vec{\delta}r_n = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - nT_F)$:

$$\vec{\delta}r_n = nT_F \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{(nT_F)^2}{2} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + O((nT_F)^3) \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} k_F^2 ||\vec{\delta}r_n||^2 &= (nk_F T_F)^2 \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2 + \frac{1}{k_F^2} \frac{(nk_F T_F)^4}{4} \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|^2 \\ &- \frac{1}{k_F} (nk_F T_F)^3 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + O((nT_F)^5) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

B.1.3 Expression dans le repère de Frenet

Accélération :

$$\mathbf{v} = v \mathbf{t} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + \frac{v^2}{R_c} \mathbf{n} \quad (\text{B.12})$$

Dans ce repère, l'argument devient :

$$k_F(\vec{\delta}r_n) = nk_F T_F v \mathbf{t} - \frac{1}{k_F} \frac{(nk_F T_F)^2}{2} \left(\frac{dv}{dt} \mathbf{t} + \frac{v^2}{R_c} \mathbf{n} \right) + O((nk_F T_F)^3) \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} k_F^2 ||\vec{\delta}r_n||^2 &= (nk_F T_F)^2 v^2 + \frac{1}{k_F^2} \frac{(nk_F T_F)^4}{4} \left(\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{v^2}{R_c} \right)^2 \right) \\ &- \frac{1}{k_F} (nk_F T_F)^3 v \frac{dv}{dt} + O((nT_F)^5) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Si on néglige les termes en dv/dt :

$$\frac{1}{\lambda_F}(\vec{\delta}r_n) = n \frac{v}{v_\phi} \mathbf{t} - \frac{\lambda_F}{2R_c} \left(n \frac{v}{v_\phi} \right)^2 \mathbf{n} \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{1}{\lambda_F^2} ||\vec{\delta}r_n||^2 = \left(n \frac{v}{v_\phi} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_F}{R_c} \right)^2 \left(n \frac{v}{v_\phi} \right)^4 \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{1}{\lambda_F} ||\vec{\delta}r_n|| = n \frac{v}{v_\phi} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_F}{R_c} \right)^2 \left(n \frac{v}{v_\phi} \right)^2} \quad (\text{B.17})$$

$$= n \frac{v}{v_\phi} \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda_F}{R_c} \right)^2 \left(n \frac{v}{v_\phi} \right)^2 \right) \quad (\text{B.18})$$

Force exercée :

$$\gamma_0 \vec{\nabla} h = h_0 k_F \gamma_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_1(k_F ||\vec{\delta} r_n||) e^{-n/M} \frac{\vec{\delta} r_n}{||\vec{\delta} r_n||} \quad (\text{B.19})$$

Développement de Taylor de J_1 en 0 :

$$2J_1(x) = x - \frac{x^3}{8} + O(x^5) \quad (\text{B.20})$$

On pose $x = 2\pi n v / v_\phi$ et $\kappa = 1/k_F R_c$.

$$J_1(k_F ||\vec{\delta} r_n||) \frac{\vec{\delta} r_n}{||\vec{\delta} r_n||} = J_1(x(1 + \frac{1}{8}\kappa^2 x^2)) \frac{\mathbf{t} - \frac{\kappa}{2}x\mathbf{n}}{1 + \frac{1}{8}\kappa^2 x^2} \quad (\text{B.21})$$

Développement du J_1 :

$$2J_1(x(1 + \frac{1}{8}\kappa^2 x^2)) = x + \frac{1}{8}\kappa^2 x^3 - \frac{x^3}{8} + O(x^5) \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{2J_1(x(1 + \frac{1}{8}\kappa^2 x^2))}{1 + \frac{1}{8}\kappa^2 x^2} = x - \frac{x^3}{8} + O(x^5) \quad (\text{B.23})$$

Finalement, chaque terme de la somme vaut :

$$J_1(k_F ||\vec{\delta} r_n||) \frac{\vec{\delta} r_n}{||\vec{\delta} r_n||} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{8} \right) \mathbf{t} - \frac{\kappa}{4} x^2 \mathbf{n} \quad (\text{B.24})$$

$$\gamma_0 \vec{\nabla} h = h_0 k_F \gamma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{8} \right) \mathbf{t} - \frac{\kappa}{4} x^2 \mathbf{n} \right) e^{-n/M} \quad (\text{B.25})$$

Valable dans la limite de faible mémoire. Le terme $\kappa/4x^2\vec{n}$ correspond à une force qui dépend de l'accélération selon la direction normale à la trajectoire. La masse du marcheur est donc modifiée par l'influence des ondes sur son mouvement. Cet effet remarquable a été signalé par J. Bush, et a fait l'objet d'une étude plus détaillée [12]. On peut ajouter que cet effet met en évidence que l'inertie d'un marcheur dépend de la direction considérée. Il s'agit donc d'un mobile dont la distribution de masse est anisotrope.

Notons également que ce résultat a été obtenu dans la limite de faible mémoire. Pour des mémoires plus élevés, l'expression B.25 devrait faire apparaître des termes d'ordres supérieurs, qui dépendent des dérivées successives de la vitesse. La force exercée sur un marcheur ne dépend donc pas uniquement de sa vitesse et de sa position, mais aussi de son accélération et de ses dérivées successives. Outre la complexité qu'une telle force peut introduire, on imagine déjà que l'espace des phases dans lequel est plongé un marcheur va dépendre de ce paramètre de mémoire Me . Plus celui ci est élevé, et plus le nombre de conditions initiales nécessaires pour décrire l'état présent sera élevé.

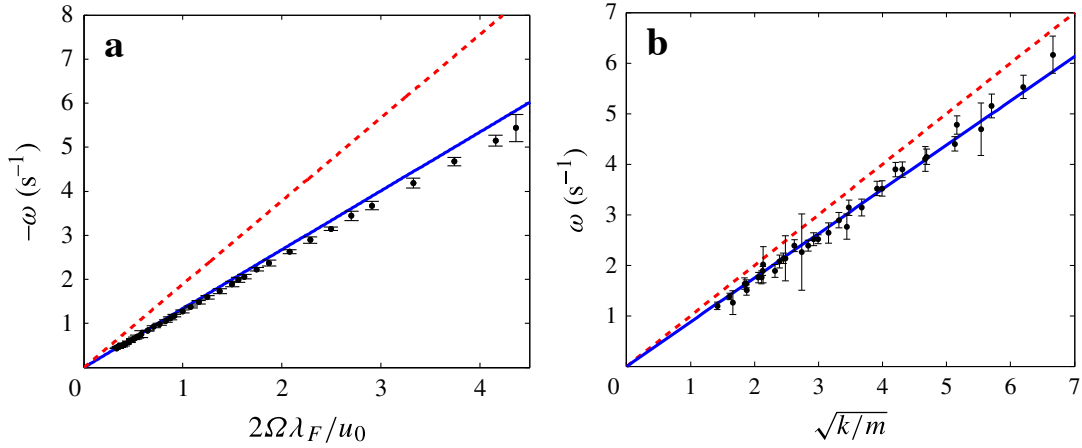


FIGURE B.1 – **Mesure de l'inertie d'un marcheur** a) Expérience de Coriolis. Le marcheur est soumis à une force $\vec{V} \cdot \vec{\Omega}$ dans le repère en rotation. b) Expérience de marcheur piégé dans un potentiel harmonique. Le marcheur est soumis à une force $-k\vec{r}$. Les courbes rouges correspondent à $m_G = m_W$. Les courbes bleues ont été obtenues par un calcul similaire à celui présenté ci-dessus, dans la limite de faible mémoire ($\text{Me}T_F \ll \lambda_F/V$)

B.2 Validation expérimentale

Les calculs ci-dessus ont été effectués par J. Bush et A. Oza en utilisant un formalisme similaire, basée sur une description continue du mouvement horizontal [12]. Pour valider leur calcul, ils ont comparé les résultats théoriques aux mesures obtenues dans les deux expériences de confinement d'un marcheur possible, en Coriolis, et en force centrale.

Pour un marcheur sur un bain en rotation décrivant une orbite de rayon R à la vitesse V_0 , l'équation du mouvement selon la direction normale s'écrit sous la forme :

$$m_W \frac{V_0^2}{R} = -2m_G V_0 \Omega \quad (\text{B.26})$$

où m_W désigne la masse du marcheur, *i.e.* la masse de la goutte m_G corrigée par la contribution des ondes à l'inertie de l'ensemble. Ω désigne la vitesse de rotation angulaire du bain. Le rayon des orbites est donc donné par :

$$R = \frac{m_W}{m_G} \frac{V_0}{2\Omega} \quad (\text{B.27})$$

Pour un marcheur soumis à une force centrale en $-k\vec{r}$, l'équation du mouvement selon la direction radiale s'écrit :

$$m_W \frac{V_0^2}{R} = -kR \quad (\text{B.28})$$

Où k est la constante de raideur du puits. En posant $\omega = \sqrt{k}m_G$, la rayon des

orbites est donné par :

$$R = \sqrt{\frac{m_W}{m_G}} \frac{V_0}{\omega} \quad (\text{B.29})$$

Les tailles d'orbites observées sont représentées en figure B.1 pour un marcheur soumis à une force de Coriolis (figure B.1b) ou soumis à une force centrale (figure B.1b). Dans les deux cas, un excellent accord est obtenue entre théorie et expérience. On peut remarquer en particulier que l'on retrouve une des différences entre les deux expériences : la modification du rayon induite par la masse additionnelle est supérieure dans le cas de Coriolis, où elle intervient sous la forme m_W/m_G que dans l'expérience en force centrale, où elle intervient sous la forme $\sqrt{m_W/m_G}$.

Bibliographie

- [1] H.D.I. Abarbanel. *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1996.
- [2] Y. Amarouchene, G. Cristobal, and H. Kellay. Noncoalescing drops. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :206104, 2001.
- [3] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger. Experimental test of bell’s inequalities using time-varying analysers. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :1804, 1982.
- [4] P. Aussillous and D. Quere. Liquid marbles. *Nature (London)*, 411 :924, 2001.
- [5] P. Bergé, M. Dubois, P. Manneville, and Y. Pomeau. Intermittency in rayleigh-bénard convection. *J. Physique Lett.*, 41 :L341, 1980.
- [6] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. *Order within Chaos : Towards a Deterministic Approach to Turbulence*. New York. Wiley and Sons., 1984.
- [7] A. L. Biance, C. Clanet, and D. Quere. Leidenfrost drops. *Phys. of Fluids*, 15 :1632, 2003.
- [8] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 1959.
- [9] E. Bossy, K. Daoudi, A. C. Boccara, M. Tanter, J. F. Aubry, G. Montaldo, and M. Fink. Time reversal of photoacoustic waves. *Appl. phys. lett.*, 89(18) :184108, 2006.
- [10] J. Browaeys. *Les ferrofluides : ondes de surface, résistance de vague et simulation de la convection dans le manteau terrestre*. PhD thesis, Université Paris Diderot, 2000.
- [11] J. C. Burton, A. L. Sharpe, R. C. A. van der Veen, A. Franco, and S. R. Nagel. Geometry of the vapor layer under a leidenfrost drop. *Phys. Rev. Lett.*, 109(074301), 2012.
- [12] J. W. M. Bush, A. U. Oza, and J. Molacek. The wave-induced added mass of walking droplets. *J. Fluid Mech. (R)*, 755 :7, 2014.
- [13] J. Cassini. *Eléments d’Astronomie*. Paris, Imprimerie Royale, 1740.
- [14] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Mécanique Quantique*. Hermann, Paris, 1977.

- [15] Y. Couder and E. Fort. Single-particle diffraction and interference at macroscopic scale. *Phys. Rev. Lett.*, 97(154101) :1–4, 2006.
- [16] Y. Couder and E. Fort. Probabilities and trajectories in a classical wave-particle duality. *Journal of Physics : Conference Series*, 361(012001), 2012.
- [17] Y. Couder, E. Fort, C.H. Gautier, and A. Boudaoud. From bouncing to floating : non-coalescence of drops on a fluid bath. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :177801, 2005.
- [18] Y. Couder, S. Protiere, E. Fort, and A. Boudaoud. Walking and orbiting droplets. *Nature*, 437 :208, 2005.
- [19] L. de Broglie. Recherches sur la théorie des quanta. *Annales de Physique*, 10-III :22–128, 1925.
- [20] P.G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quere. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Echelles, Belin, 2002.
- [21] B. Van der Pol. On "relaxation-oscillations". *Philos. Mag. J. Sci.*, 1926.
- [22] B. Van der Pol and J. Van der Mark. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. *Phil. Mag.*, 6, 1928.
- [23] R. L. Devaney. Reversible diffeomorphisms and flows. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 218 :89–113, 1976.
- [24] M. Dorigo, V. Maniezzo, and A. Colorni. Ant system : optimization by a colony of cooperating agents. *Systems, Man, and Cybernetics*, 26 :29–41, 1996.
- [25] S. Douady. *Instabilité paramétrique d'ondes de surface*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure (Lyon), 1989.
- [26] S. Douady. Experimental study of the faraday instability. *J. Fluid Mech.*, 221 :383–409, 1990.
- [27] S. Douady and S. Fauve. Pattern selection in faraday instability. *Europhys. Lett.*, 6(3) :221–226, 1988.
- [28] A. Duchesne, C. Savaro, L. Lebon, C. Pirat, and L. Limat. Multiple rotations of a drop rolling inside a horizontal circular hydraulic jump. *Europhys. Lett.*, 102(6) :64001, 2013.
- [29] JP. Eckmann. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Rev. Mod. Phys.*, 53 :643–654, 1981.
- [30] A. Eddi. *Marcheurs, Dualité onde-particule et Mémoire de chemin*. PhD thesis, Université Paris Diderot, 2011.
- [31] A. Eddi, J. Moukhtar, S. Perrard, E. Fort, and Y. Couder. Level splitting at macroscopic scale. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :264503, 2012.

- [32] A. Eddi, E. Sultan, J. Moukhtar, E. Fort, M. Rossi, and Y. Couder. Information stored in faraday waves : the origin of a path memory. *J. Fluid Mech.*, 674 :433–463, 2011.
- [33] A. Eddi, D. Terwagne, E. Fort, and Y. Couder. Wave propelled ratchets and drifting rafts. *Europhys. Lett.*, 82(44001), 2008.
- [34] U. Erdmann and W. Ebeling. On the attractors of two dimensionnal rayleigh oscillators including noise on the attractors of two dimensionnal rayleigh oscillators including noise. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 15, 2005.
- [35] M. Faraday. On the forms and states of fluids on vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 52 :299–340, 1831.
- [36] S. Fauve. Chaotic dynamos generated by fully turbulent flows. *Chaos*, 66 :55–95, 2013.
- [37] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*, volume 3 Chap. 37. Addison Wesley, New York, 1963.
- [38] M. Fink. Time reversal of ultrasonic fields. i. basic principles. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions*, 39 :555–566, 1992.
- [39] M. Fink and C. Prada. Acoustic time-reversal mirrors. *Inverse problems*, 17(1) :R1, 2001.
- [40] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Ann. École Norm. Sup.*, 12(47-88), 1883.
- [41] E. Fort, A. Eddi, J. Moukhtar, A. Boudaoud, and Y. Couder. Path-memory induced quantization of classical orbits. *PNAS*, 107(41) :17515–17520, 2010.
- [42] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. Savoirs Actuels. CNRS Editions, 2001.
- [43] D. M. Harris and J. W. M. Bush. Droplets walking in a rotating frame : from quantized orbits to wavelike statistics. *J. Fluid Mech.*, 739 :444–464, January 2014.
- [44] D. M. Harris, J. Moukhtar, E. Fort, Y. Couder, and J. W. M. Bush. Wavelike statistics from pilot-wave dynamics in a circular corral. *Phys. Rev. E*, 88 :011001, 2013.
- [45] J.F. Heagy, N. Platt, and S. M. Hammel. Characterization of on-off intermittency. *Phys. Rev. E*, 49(1140), 1994.
- [46] B. Hölldobler and E. O. Wilson. The multiple recruitment systems of the african weaver ant *oecophylla longinoda* (latreille) (hymenoptera : Formicidae). *Behavioral Ecology and Sociobiology*, 3(1) :19–60, 1978.

- [47] M. Hubert, D. Robert, H. Caps, S. Dorbolo, and N. Vandewalle. Resonant and antiresonant bouncing droplets. *Phys. Rev. E*, (accepted), 2014.
- [48] Ch. Huygens. *Traité de la lumière*. Leiden, 1690.
- [49] D. E. Jackson, S. J. Martin, M. Holcombe, and F. L. W. Ratnieks. Longevity and detection of persistent foraging trails in pharaoh’s ants, *monomorium pharaonis* (l.). *Animal Behaviour*, 71 :351–359, 2006.
- [50] R. Jeanson, F. L. W. Ratnieks, and J. L. Deneubourg. Pheromone trail decay rates on different substrates in the pharaoh’s ant, *monomorium pharaonis*. *Physiological Entomology*, 28 :192–198, 2003.
- [51] A. Kirman. Ants, rationality, and recruitment. *The Quarterly Journal of Economics*, 108(1), 1993.
- [52] K. Kumar and L.S. Tuckerman. Parametric instability of the interface between two fluids. *J. Fluid Mech.*, 279 :49–68, 1994.
- [53] M. Labousse. *Phénomènes d’auto-organisation d’une dualité onde-particule*. PhD thesis, Université Paris Jussieu, 2014.
- [54] M. Labousse and S. Perrard. Non-hamiltonian features of a classical pilot-wave dynamics. *Phys. Rev. E*, 90 :022913, 2014.
- [55] J. G. Leidenfrost. *De Aquae Communis Nonnullis Qualitatibus Tractatus*. Duisburg, 1756.
- [56] H. Lhuissier, Y. Tagawa, T. Tran, and C. Sun. Levitation of a drop over a moving surface. *J. Fluid Mech.*, 733 :1–14, 2013.
- [57] H. Linke, B. J. Aleman, L. D. Melling, M. J. Taormina, M. J. Francis, C. C. Dow-Hygelund, V. Narayanan, R. P. Taylor, and A. Stout. Self-propelled leidenfrost droplets. *Phys. Rev. Lett.*, 96, 2006.
- [58] E. P. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atm. Science*, 20(130-141), 1963.
- [59] P. Manneville. *Instabilités, Chaos et Turbulence*. Les éditions de l’école polytechnique, 2006.
- [60] P. Marmottant and E. Villermaux. Fragmentation of stretched liquid ligaments. *Phys. Fluids*, 16(8), 2004.
- [61] F. Moisy, M. Rabaud, and K. Salsac. A synthetic schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface. *Exp. in Fluids*, 46(6) :1021–1036, 2009.
- [62] J. Molacek and J. W. M. Bush. A quasi-static model of drop impact. *Phys. of Fluids*, 24(127103), 2012.

- [63] J. Molacek and J. W. M. Bush. Drops bouncing on a vibrated bath. *J. Fluid Mech.*, 727 :582–611, 2013.
- [64] J. Molacek and J. W. M. Bush. Drops walking on a vibrating bath : towards a hydrodynamic pilot-wave theory. *J. Fluid Mech.*, 727, 2013.
- [65] A. U. Oza, R. R. Rosales, and J. W. M. Bush. A trajectory equation for walking droplets : hydrodynamic pilot-wave theory. *J. Fluid Mech.*, In press., 2013.
- [66] S. Perrard, Y. Couder, E. Fort, and L. Limat. Leidenfrost levitated liquid tori. *EPL*, 100, 2013.
- [67] S. Perrard, M. Labousse, M. Miskin, E. Fort, and Y. Couder. Wave-particle self-organized eigenstates. *Nat. Commun.*, 5 :3219, 2014.
- [68] F. Pétrélis, Stéphan Fauve, Emmanuel Dormy, and Jean-Pierre Valet. Simple mechanism for reversals of earth’s magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :144503, Apr 2009.
- [69] C. Pirat, L. Lebon, A. Fruleux, J. S. Roche, and L. Limat. Gyroscopic instability of a drop trapped inside an inclined circular hydraulic jump. *Phys. Rev. Lett.*, 105 :084503, 2010.
- [70] K. Piroird. *Dynamiques spéciales de gouttes non-mouillantes*. PhD thesis, Ecole polytechnique, 2011.
- [71] K. Piroird, C. Clanet, and D. Quéré. Magnetic control of leidenfrost drops. *Phys. Rev. E*, 85 :056311, 2012.
- [72] N. Platt, E. A. Spiegel, and C. Tresser. On-off intermittency : A mechanism for bursting. *Phys. Rev. Lett.*, 70(279), 1993.
- [73] S. Protière. *Gouttes rebondissantes : une association onde-particule à échelle macroscopique*. PhD thesis, Université Paris Diderot, 2007.
- [74] S. Protière, A. Boudaoud, and Y. Couder. Particle wave association on a fluid interface. *J. Fluid Mech.*, 554 :85–108, 2006.
- [75] D. Quéré. Leidenfrost dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 45 :197–215, 2013.
- [76] J. W. Rayleigh. *The theory of sound*. Macmilland and Co, 1877.
- [77] J. A. G. Roberts and G. R. W. Quispel. Chaos and time-reversal symmetry. order and chaos in reversible dynamical systems. *Physics Reports*, 216(2-3) :63–177, 1992.
- [78] O. E. Rössler and P. J. Ortoleva. Strange attractors in 3-variable reaction systems. *Lecture Notes in Biomathematics*, 21 :67–73, 1978.

- [79] A. Snezhko, E. Ben Jacob, and I. S. Aranson. Pulsating-gliding transition in the dynamics of levitating liquid nitrogen droplets. *New Journal of Physics*, 10(043034), 2008.
- [80] K. R. Sreenivas, P. K. De, and J. H. Arakeri. Levitation of a drop over a film flow. *J. Fluid Mech.*, 380 :297–307, 1999.
- [81] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology and chemistry*. Perseus Books Group, 1994.
- [82] D. Terwagne, T. Gilet, N. Vandewalle, and S. Dorbolo. Metastable bouncing droplets. *Phys. of Fluids*, 21 :054103, 2009.
- [83] D. Terwagne, F. Ludewig, N. Vandewalle, and S. Dorbolo. The role of the droplet deformations in the bouncing droplet dynamics. *Phys. of Fluids*, 25(122101), 2013.
- [84] D. Terwagne, N. Vandewalle, and S. Dorbolo. Lifetime of a bouncing droplet. *Phys. Rev. E*, 76(056311), 2007.
- [85] M. Berhanu *et al.* Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo. *Europhys. Lett.*, 77 :590001, 2007.
- [86] L. Vagharchakian, F. Restagno, and L. Léger. Capillary bridge formation and breakage : A test to characterize antiadhesive surfaces. *The Journal of Physical Chemistry B*, 113(12) :3769–3775, 2009.
- [87] N. Vandewalle, D. Terwagne, K. Mulleners, T. Gilet, and S. Dorbolo. Dynamics of a bouncing droplet onto a vertically vibrated surface. *Phys. Rev. Lett.*, 100(167802), 2008.
- [88] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, cambridge mathematical library edition, 1922.
- [89] B. Y. Zel’dovich, N. F. Pilipetsky, and V. V. Shkunov. *Principles of Phase Conjugation*. Springer-Verlag (Berlin), 1985.